Material Teórico - Módulo Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Teorema do Resto

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

17 de abril de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 O teorema do resto

Um caso particular bastante comum do problema de divisão entre dois polinômios é quando o dividendo, $d(x)$, é uma função afim, ou seja, $d(x) = ax+b$, em que a e b são constantes e $a \neq 0$.

Exemplo 1. *Calcule o quociente e o resto da divisão de $p(x) = x^3 - x^2 + 2x - 5$ por $d(x) = x - 2$. Escreva o resultado da divisão na forma $p(x) = d(x)\,q(x) + r(x)$. Você consegue perceber algo interessante no resultado obtido?*

Solução. Realizando a divisão de $x^3 - x^2 + 2x - 5$ por $x - 2$, veja como fica o dispositivo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & +2x & -5 & x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2+x+4 \\ \cline{1-2}
 & x^2 & +2x & & \\
 & -x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 4x & -5 & \\
 & & -4x & +8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 3 &
\end{array}
$$

Assim, o quociente é $q(x) = x^2 + x + 4$ e o resto $r(x) = 3$. Isso nos permite escrever

$$p(x) = (x - 2)q(x) + 3.$$

Observe que essa equação precisa ser satisfeita para todo valor de x (complexo). Em particular, quando $x = 2$, obtemos que

$$p(2) = (2 - 2) \cdot q(2) + 3 = 0 \cdot q(2) + 3 = 3.$$

O interessante é que, independentemente de qual seja o valor de $q(2)$, podemos concluir que $p(2) = 3$, já que $0 \cdot q(2) = 0$. Assim, pudemos encontrar o valor de $p(2)$ sem substituir $x = 2$ na expressão de $p(x)$ do enunciado. Por outro lado, a via usual para calcular $p(2)$ seria:

$$p(2) = 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 8 - 4 + 4 - 5 = 3.$$

Isso faria com que calculássemos o resto sem a necessidade de executar a divisão! □

O teorema seguinte generaliza a ideia do exemplo acima. Ele é o que chamamos de *Teorema do Resto* (para polinômios).

Teorema 2 (Teorema do Resto). *Seja $p(x)$ um polinômio qualquer com coeficientes complexos e $d(x) = ax + b$ um polinômio de grau 1 (ou seja, a e b são constantes, com $a \neq 0$). O resto da divisão de $p(x)$ por $ax+b$ é uma função constante de valor igual a $p(-b/a)$. Observação: para lembrar facilmente desse resultado, note que $-b/a$ é a raiz do polinômio $d(x)$.*

Demonstração. O fato de que $-b/a$ é raiz de $d(x)$ é trivial, uma vez que:

$$d\left(\frac{-b}{a}\right) = \cancel{a} \cdot \frac{-b}{\cancel{a}} + b = -b + b = 0$$

Sejam $q(x)$ e $r(x)$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $ax + b$. Como $ax + b$ tem grau 1, o resto de tal divisão, $r(x)$, precisa possui grau zero. Ou seja, já sabemos que $r(x)$ é uma função contante. Digamos que $r(x) = t$ para todo x. Logo, temos

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + t.$$

Agora, fazendo $x = -b/a$ e lembrando que $d(-b/a) = 0$, temos

$$\begin{aligned} p\left(\frac{-b}{a}\right) &= 0 \cdot q\left(\frac{-b}{a}\right) + t \\ &= 0 + t \\ &= t. \end{aligned}$$

Logo, $p(-b/a)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por $ax + b$. □

Um caso ainda mais comum do teorema acima é quando o divisor é uma função do tipo $d(x) = x - c$, para alguma constante c (ou seja, $a = 1$ e $b = -c$, na notação anterior).

Assim sendo, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - c$ é simplesmente $p(c)$. Isso nos dá uma mão de duas vias, a qual pode ser útil em diversas situações: (i) podemos calcular o valor de $p(c)$ sem a necessidade de substituir c na fórmula de $p(c)$; (ii) podemos fazer o processo inverso de obter o resto da divisão por $x - c$ calculando diretamente o valor de $p(c)$, sem a necessidade de aplicar o algoritmo da divisão.

Outra consequência imediata da discussão acima é o seguinte teorema de D'Alembert.

Teorema 3 (Teorema de D'Alembert). *Para todo polinômio (complexo) $p(x)$ e todo número complexo c, temos que c é raiz de $p(x)$ se e somente se, $x - c$ é um fator de $p(x)$, ou seja, $p(x) = (x - c)\,q(x)$.*

Demonstração. Pelo Teorema do Resto, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - c$ é igual a $p(c)$. Dessa forma, $p(c) = 0$ se, e somente se, o resto da divisão for zero. Assim, c é raiz de $p(x)$ se, e somente se, $x - c$ for um fator de $p(x)$. $\square$

Pode-se dizer que o teorema mais importante de toda a Álgebra (e mesmo um dos teoremas mais importantes em Matemática) é o seguinte resultado de Gauss:

Teorema Fundamental da Álgebra: todo polinômio de coeficientes complexos e grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração do *Teorema Fundamental da Álgebra* requer vários conceitos que só são estudados no Ensino Superior e, portanto, foge do escopo desta aula. Porém, podemos aplicar esse teorema facilmente.

Um consequência importante dele é que, em conjunto com o Teorema de D'Alembert, podemos concluir que todo polinômio não nulo com coeficientes complexos pode ser fatorado como o produto de uma constante por polinômios de grau 1 (tantos polinômios de grau 1 quanto seja o grau do polinômio que está sendo fatorado).

De fato, seja $f(x)$ um polinômio complexo qualquer. Se $f(x)$ não é constante, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, ele possui uma raiz complexa, digamos a_1. Pelo Teorema de D'Alembert, o resto da divisão de $f(x)$ por $x - a_1$ é igual a zero, logo, existe $q_1(x)$ tal que

$$f(x) = (x - a_1)q_1(x).$$

Agora, repita o argumento acima: se $q_1(x)$ não for constante, existe uma raiz complexa a_2 de $q_1(x)$ e podemos escrever:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_2(x).$$

Veja que o grau de $q_i(x)$ diminui em exatamente uma unidade em cada passo (à medida que i aumenta). Assim, se o grau de $f(x)$ é igual a n, podemos executar o processo acima exatamente n vezes até obter um polinômio constante, $q_n(x) = c$, o que resulta em:

$$f(x) = c(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

2 Exercícios resolvidos

Exemplo 4. *Calcule o resto da divisão de $x^5 + 1$ por $x + 1$.*

Solução Direta. Realizando a divisão de $x^5 + 1$ por $x + 1$, veja como fica o dispositivo:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & -x^4 & & & & & x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ \cline{1-2}
 & -x^4 & +0x^3 & & & & \\
 & x^4 & +x^3 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & x^3 & +0x^2 & & & \\
 & & -x^3 & -x^2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -x^2 & +0x & & \\
 & & & x^2 & +x & & \\ \cline{4-5}
 & & & & x & +1 & \\
 & & & & -x & -1 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Assim, o quociente é $q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ e o resto $r(x) = 0$. Isso nos permite escrever

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

Portanto, o resto da divisão requisitado é igual a zero. $\square$

Solução via Teorema do Resto. Seja $p(x) = x^5 + 1$. Como $x+1$ é um polinômio de primeiro grau que possui "-1" como raiz, o Teorema do Resto (Torema 2) nos diz que o resto da divisão de $x^5 + 1$ por $x+1$ é igual a $p(-1)$. Veja que:

$$p(-1) = (-1)^5 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Ou seja, o resto desejado é igual a zero. $\square$

Observação. *No cálculo acima, fizemos $p(-1)$ e não $p(1)$. Isso é porque nos foi pedido para dividir por $x+1$ e*

$$x + 1 = x - (-1).$$

Assim o valor de $p(1)$ seria o resto da divisão de $p(x)$ por $x-1$. Para não se confundir, basta sempre lembrar que o valor a ser substituído por x em $p(x)$ é a raiz do dividendo *(como fizemos na solução).*

Exemplo 5. *Use o Teorema do Resto para calcular o valor de $f(x) = 6x^3 - 5x^2 + 4x - 17$ em $x = 3$.*

Solução. O polinômio $d(x) = x - 3$, possui 3 como raiz. Assim, para calcular $f(3)$ basta calcular o resto da divisão de $f(x)$ por $x - 3$. Vamos executar a divisão montando o dispositivo estudado nas aulas anteriores:

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -5x^2 & +4x & -17 & x-3 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +18x^2 & & & 6x^2+13x+43 \\ \cline{1-2}
 & 13x^2 & +4x & & \\
 & -13x^2 & +39x & & \\ \cline{2-3}
 & & 43x & -17 & \\
 & & -43x & +129 & \\ \cline{3-4}
 & & & 112 &
\end{array}$$

Temos que o resto da divisão é 112. Logo, $f(3) = 112$. $\square$

Observação 6. *O que se pede no exemplo anterior parece ser contraproducente. De fato, o estudante provavelmente acharia mais fácil calcular $f(3)$ diretamente, usando:*

$$\begin{aligned} f(3) &= 6 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 17 \\ &= 6 \cdot 27 - 5 \cdot 9 + 4 \cdot 3 - 17 \\ &= 162 - 45 + 12 - 17 \\ &= 112. \end{aligned}$$

Na aula seguinte, veremos uma maneira mais prática de organizar o dispositivo da divisão no caso em que o dividendo é um polinômio de grau 1, o que deixará claro que o número de operações que executamos na solução do Exemplo 5, na verdade, é bastante pequeno. Para tal usaremos o chamado "Dispositivo de Briot-Ruffini". Ao contrário do que parece, ao fazer isso, conseguimos calcular $f(3)$ utilizando um número menor de operações ariméticas fundamentais (soma, subtração, produto e divisão de complexos) do que substituindo 3 diretamente em $f(x)$. Isso se tornará ainda mais evidente, quando quisermos calcular o valor de $f(x)$ para valores não reais de x, como por exemplo $x = 2 + i$. Realmente, nestes casos o cálculo de potências tais como $(2 + i)^3$, é "computacionalmente caro".

De fato, o método de Briot-Ruffini é tão eficiente que pode ser utilizado internamente por algoritmos de calculadoras que não possuem a potenciação como operação primitiva.

Exemplo 7. *Seja $f(x) = 2ix^3 + (3i - 2)x^2 + 7x + i$. Calcule o resto da divisão de $f(x)$ por $2x - 3$.*

Solução. O dividendo é um polinômio de grau 1 cuja raiz é obtida a seguir:

$$2x - 3 = 0 \implies x = \frac{3}{2}.$$

Assim, o resto da divisão pedida é $f(3/2)$ que é:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{3}{2}\right) &= 2i\left(\frac{3}{2}\right)^3 + (3i-2)\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 7\cdot\frac{3}{2} + i \\
&= \frac{27i}{4} + \frac{27i-18}{4} + \frac{21}{2} + i \\
&= \frac{27i + 27i - 18 + 42 + 4i}{4} \\
&= \frac{58i + 24}{4} \\
&= 6 + \frac{29i}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 8. *Calcule valores de a e b para os quais o polinômio $-2x^3 + ax^2 + b$ seja divisível por $(x-1)(x-2)$.*

Solução. Queremos que

$$-2x^3 + ax^2 + b = (x-1)(x-2)\,q(x),$$

para algum polinômio $q(x)$. Substituindo x primeiro por 1 e depois por 2, obtemos, respectivamente:

$$\begin{cases} -2 + a + b = 0, \\ -16 + 4a + b = 0. \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação desse sistema para b, obtemos $b = 2 - a$; então, a segunda equação dá

$$-16 + 4a + 2 - a = 0 \implies 3a = 14 \implies a = \frac{14}{3}.$$

Portanto,

$$b = 2 - \frac{14}{3} = \frac{6-14}{3} = \frac{-8}{3}.$$

$\square$

Exemplo 9. *Calcule o quociente da divisão de $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + b$ por $D(x) = x^4 + 1$ sabendo que $P(x)$ é divisível por $T(x) = x - 2$. Observação: 'b' é uma constante.*

Solução. Como $P(x)$ é divisível por $x-2$, pelo Teorema de D'Alembert temos que $P(2)=0$. Logo,

$$2^5+2^4+2^3+2^2+2+b=0 \implies b=-62.$$

Agora, basta efetuar a divisão de $P(x)$ por $D(x)$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^5 & +x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & +62 & & x^4+1 \\
\cline{8-8}
-x^5 & & & & -x & & & x+1 \\
\cline{1-5}
 & x^4 & +x^3 & +x^2 & +0x & +62 & & \\
 & -x^4 & & & & -1 & & \\
\cline{2-6}
 & & x^3 & +x^2 & +0x & +61 & &
\end{array}$$

Assim, o resto da divisão é x^3+x^2+61. □

Exemplo 10. *Dividindo-se o polinômio*

$$f(x)=2ix^3-(i+3)x^2+(-1+i)x+k$$

por $h(x)=x-i$, obtêm-se resto $r(x)=3i$, Calcule k. Observação: aqui, i é a unidade imaginária ($i^2=-1$) e k é uma constante (desconhecida, mas independente de x).

Solução. Pelo Teorema do Resto, o resto da divisão de $f(x)$ por $h(x)$ é igual a $f(i)$. Como é dito que tal resto é igual a $3i$, segue que:

$$f(i)=3i.$$

Logo,

$$2i\cdot i^3-(i+3)i^2+(-1+i)i+k=3i.$$

Uma vez que $i\cdot i^3=i^4=1$ e $i^2=-1$, temos

$$2+(i+3)+(-i+i^2)+k=3i.$$

Logo,

$$5+i-i+(-1)+k=3i \implies k=-4+3i.$$

□

Apesar do Teorema do Resto só poder ser usado quando o divisor tem grau 1, a ideia de sua demonstração pode ser usada em casos mais gerais. O exemplo seguinte mostra como fazer isso.

Exemplo 11. *Qual o resto da divisão de* $p(x) = x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 19x - 2$ *por* $d(x) = x^2 + 3x - 4$*?*

Solução. Sejam $q(x)$ e $r(x)$ o quociente e o resto da divisão em questão. Assim,

$$x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 19x - 2 = q(x)(x^2 + 3x - 4) + r(x). \quad (1)$$

Como o divisor tem grau 2, neste caso $r(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 1 (mas não precisa ser constante). Assim, queremos calcular a e b tais que $r(x) = ax + b$.

O truque é calcular todas as raízes do divisor e substituir cada uma na equação (1). O divisor $d(x) = x^2 + 3x - 4$ tem como raízes os números $x = 1$ e $x = -4$ (os encontramos resolvendo a equação de segundo grau $x^2 + 3x - 4 = 0$). Assim, $d(1) = 0$ e $d(-4) = 0$.

Agora, fazendo $x = 1$ na equação (1) temos:

$$1^4 + 8 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 - 19 \cdot 1 - 2 = q(1) \cdot 0 + (a + b).$$

Como $q(1) \cdot 0 = 0$ independentemente do valor de $q(1)$, simplificando a igualdade acima, obtemos:

$$a + b = 1 + 8 + 12 - 19 - 2 = 0.$$

Da mesma forma, fazendo $x = -4$ na equação (1) temos:

$$(-4)^4 + 8 \cdot (-4)^3 + 12 \cdot (-4)^2 - 19 \cdot (-4) - 2 = q(-4) \cdot 0 + (-4a + b).$$

Logo,

$$\begin{aligned} -4a + b &= 256 + 8 \cdot (-64) + 12 \cdot 16 - 19 \cdot (-4) - 2 \\ &= 256 - 512 + 192 + 76 - 2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Agora, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + b = 10. \end{cases}$$

Como $b = -a$, segue que $-4a - a = 10$, logo, $a = -2$. Por fim, $b = -(-2) = 2$.

Resumindo os cálculos acima, concluímos que $r(x) = -2x + 2$. $\square$

Solução direta.

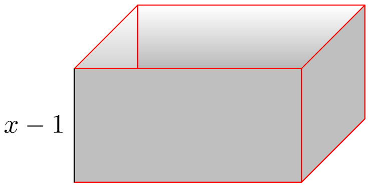
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +8x^3 & +12x^2 & -19x & -2 & x^2+3x-4 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & +4x^2 & & & x^2+5x+1 \\ \cline{1-3}
 & 5x^3 & +16x^2 & -19x & & \\
 & -5x^3 & -15x^2 & +20x & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & +x & -2 & \\
 & & -x^2 & -3x & +4 & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & +2 &
\end{array}$$

Assim, o resto obtido é $-2x + 2$. $\square$

Exemplo 12. *Na figura abaixo, o paralelepípedo é reto-retângulo, tem volume dado por $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ e altura medindo $x - 1$. Calcule:*

(a) A área da base do paralelepípedo em função de x.

(b) As dimensões da base, sabendo que cada lado é um polinômio do tipo $x + c$, em que c é um número real.



Solução. Recordando que o volume de um paralelepípedo reto-retângulo é dado pelo produto de suas três dimensões, concluímos que a base do paralelepípedo pode ser calculada dividindo o volume pela altura:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 8x^2 + 19x - 12 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^3 \;\; + x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 - 7x + 12 \\
\cline{1-1}
-7x^2 + 19x \qquad & \\
7x^2 \;\; - 7x \qquad & \\
\cline{1-1}
12x - 12 & \\
-12x + 12 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Assim, a área da base é $x^2 - 7x + 12$.

Como é dito no enunciado que as dimensões da base são polinômios lineares em x e a área da base é o produto da largura pela profundidade, basta usar a fatoração:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

Os valores 3 e 4 podem ser obtidos calculando as raízes da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$. Os polinômios $x - 3$ e $x - 4$ representam as dimensões da base. $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que conteúdo seja coberto em dois encontros de 50 minutos. Sugerimos também, aliás fortemente, que o leitor procure a aba "Carderno de Exercícios" desta aula no Portal da Matemática. Lá há vários outros exercícios de introdução, fixação e aprofundamento para este módulo, todos com esboços de soluções. (Apesar disso, sugerimos que o leitor tente resolvê-los antes de ver suas soluções.)

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios, Equações*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.