Material Teórico - Módulo Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Relações Métricas no Círculo

9º ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de junho de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

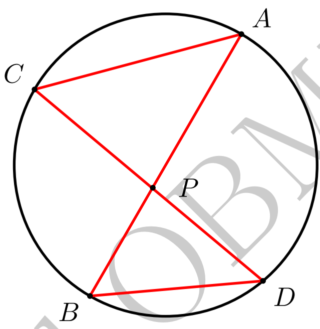
1 Relações métricas no círculo

Iniciamos esse material com a seguinte proposição:

Proposição 1. *Sejam AB e CD cordas de um círculo λ e $P = AB \cap CD$. Então vale a relação*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

Prova. Suponha, inicialmente, que P está no interior de λ. Veja a figura abaixo.



Pelo teorema do ângulo inscrito, temos as igualdades

$$P\widehat{A}C = B\widehat{A}C = C\widehat{D}B = P\widehat{D}B$$

e

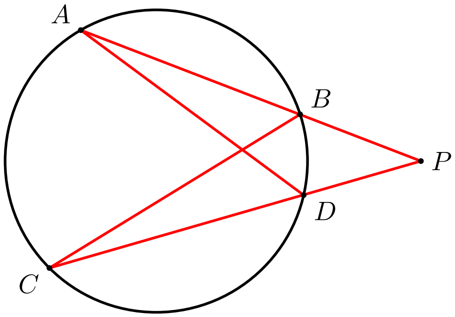
$$P\widehat{C}A = D\widehat{C}A = A\widehat{B}D = P\widehat{B}D.$$

Assim, pelo caso AA, os triângulos APC e DPB são semelhantes. Daí, obtemos

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$$

e, multiplicando em $\times$, segue que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Quando P não está no interior de λ, temos a situação descrita na próxima figura. Novamente pelo teorema do



ângulo inscrito, temos

$$P\widehat{A}D = B\widehat{A}B = D\widehat{C}B = P\widehat{C}B.$$

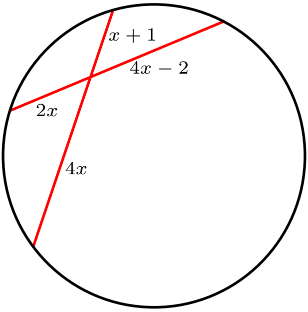
Como $A\widehat{P}D = B\widehat{P}C$, concluímos, também pelo caso AA, que os triângulos PAD e PCB são semelhantes. Como antes, a semelhança nos dá

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$$

e, daí, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$. $\square$

Vejamos alguns exemplos nos quais o resultado da proposição anterior é aplicado.

Exemplo 2. *Encontre o valor de x na figura abaixo.*



Solução. Utilizando a proposição 1, temos

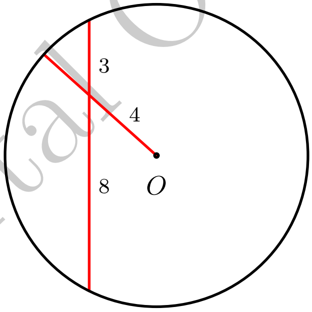
$$2x \cdot (4x - 2) = 4x \cdot (x + 1).$$

Agora,

$$\begin{aligned} 2x \cdot (4x - 2) = 4x \cdot (x + 1) &\iff \\ \iff \cancel{2x} \cdot (4x - 2) &= 2 \cdot \cancel{2x} \cdot (x + 1) \\ \iff 4x - 2 &= 2(x + 1) \\ \iff 4x - 2 &= 2x + 2 \\ \iff 4x - 2x &= 2 + 2 \\ \iff 2x &= 4 \\ \iff x &= 2. \end{aligned}$$

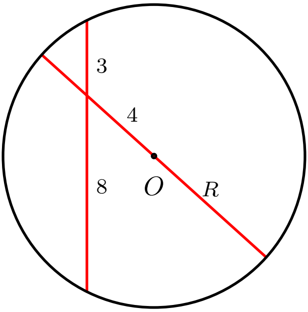
□

Exemplo 3. *Encontre raio do círculo desenhado na figura abaixo.*



Solução. Vamos denotar por R o raio do círculo. Veja que podemos completar o raio que está desenhado para obter um diâmetro e, em seguida, aplicar a proposição 1. Acompanhe na próxima figura: Desse modo, obtemos

$$(R + 4) \cdot (R - 4) = 3 \cdot 8.$$

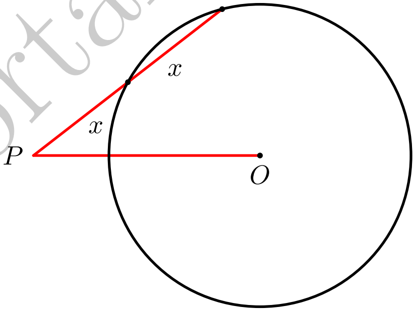


Agora,

$$\begin{aligned}(R+4)\cdot(R-4)=3\cdot 8 &\Longleftrightarrow R^2-16=24\\ &\Longleftrightarrow R^2=40\\ &\Longleftrightarrow R=\sqrt{40}\\ &\Longleftrightarrow R=2\sqrt{10}.\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 4. *Na figura abaixo, encontre o valor de x, sabendo que $\overline{OP}=6$ e $R=4$, em que R é o raio do círculo.*

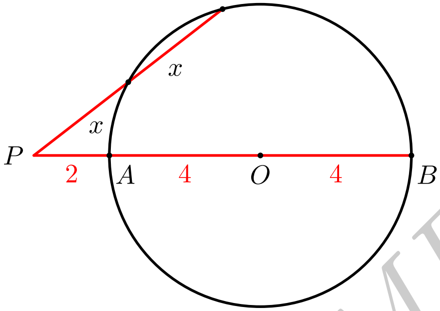


Solução. Observando a próxima figura, notamos que $\overline{OA}=\overline{OB}=4$, logo,

$$\overline{PA}=\overline{OP}-\overline{OA}=6-4=2$$

e

$$\overline{PB} = \overline{PO} + \overline{OB} = 6 + 4 = 10.$$



Desse modo, utilizando a proposição 6, obtemos

$$x \cdot 2x = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = 2 \cdot 10 = 20.$$

Mas aí,

$$2x^2 = 20 \Longleftrightarrow x^2 = 10 \Longleftrightarrow x = \sqrt{10}.$$

$\square$

Repetindo a ideia utilizada nas soluções dos exemplos 3 e 4, é possível mostrar o seguinte corolário da proposição 1.

Corolário 5. *Sejam λ um círculo de centro O e raio R, AB uma corda de λ e $P \in AB$ tal que $P \neq A$ e $P \neq B$. Então*

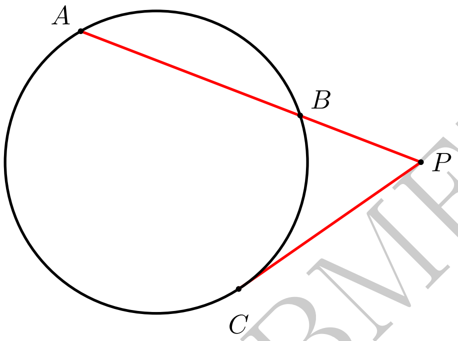
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (R + \overline{OP}) \cdot (R - \overline{OP}) = R^2 - \overline{OP}^2.$$

Como exercício, deixamos a seu cargo a tarefa de escrever uma demonstração.

Quando P é exterior ao círculo λ e $\overleftrightarrow{PC}$ é tangente ao círculo, em vez de secante, temos o seguinte resultado, o qual pode ser visto como um "caso limite" da proposição 1, no caso em que o ponto P é exterior ao círculo.

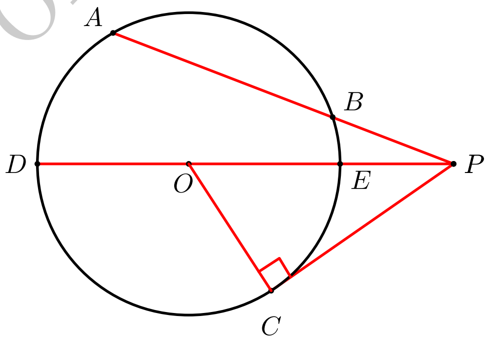
Proposição 6. *Sejam AB uma corda e C um ponto sobre um círculo λ. Se P é um ponto do plano tal que $B \in AP$ e PC é tangente a λ, então*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2.$$



Prova. Sejam O o centro de λ e D, E os pontos de interseção entre $\overleftrightarrow{OP}$ e λ (veja a figura abaixo). Uma vez que $\overline{PC}$ é tangente a λ, temos que $\angle PCO$ é reto. Então, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para obter

$$\overline{OC}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{OP}^2.$$



Por outro lado,

$$\overline{OC}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{OP}^2 \iff \overline{PC}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OC}^2$$
$$\iff \overline{PC}^2 = (\overline{OP} + \overline{OC}) \cdot (\overline{OP} - \overline{OC}).$$

Em seguida, observe que

$$\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = \text{medida do raio do círculo},$$

logo,

$$\begin{aligned}\overline{PC}^2 &= (\overline{OP} + \overline{OC}) \cdot (\overline{OP} - \overline{OC}) \\ &= (\overline{OP} + \overline{OD}) \cdot (\overline{OP} - \overline{OE}) \\ &= \overline{PD} \cdot \overline{PE}.\end{aligned}$$

Por fim, aplicando a proposição 1 considerando as cordas AB e DE, obtemos

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PE} = \overline{PC}^2.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Caso sobre algum tempo, use as referências bibliográficas citadas a seguir para propor exemplos adicionais aos alunos.

Sugerimos aos professores que apresentem as demonstrações com todos os detalhes, pois as ideias envolvidas são frequentes nas soluções de vários outros problemas. Depois que as proposições forem demonstradas, recomendamos que algum tempo seja reservado para que os alunos tentem encontrar as soluções dos exemplos por conta própria.

Chame a atenção dos alunos para o fato de que a ideia para demonstrar o corolário 5 é a mesma das soluções dos exemplos 3 e 4.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.