**Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1**

# Composição de Funções

## Tópicos Adicionais

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**4 de outubro de 2019**



PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

# 1 Composição de funções

Consideremos duas funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ tais que a imagem de $f$ está contida em $C$. Podemos considerar a função $h$ que tem domínio $A$, contradomínio $D$ e cuja ação sobre os elementos de $A$ é dada pela ação da função $f$ seguida pela ação da função $g$, ou seja, a função $h : A \to D$ dada da seguinte maneira: para cada elemento $a \in A$, sua imagem pela função $h$ é obtida tomando-se primeiro $f(a) \in \mathrm{Im}(f) \subset C$ e, depois, tomando-se $g(f(a)) \in D$ (veja a figura 1).

A função $h$ é chamada **composta** de $f$ e $g$ (nessa ordem, ou seja, aplicamos primeiro $f$ e depois $g$) e a denotamos por $g \circ f$. Em resumo, $g \circ f : A \to D$ é a função dada por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

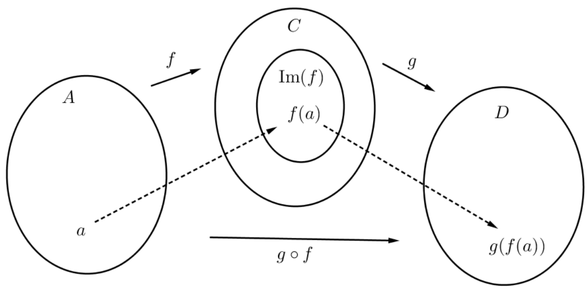


Figura 1: a ação da função composta $g \circ f$ sobre um elemento $a \in A$.

**Observação 1.** *Muitos autores (senão a maioria) definem a composta de $f$ e $g$ exigindo que o contradomínio de $f$ seja igual ao domínio de $g$, isto é, que tenhamos $f : A \to B$ e $g : B \to D$. Adotar esta definição ou a dada acima não gera diferenças essenciais. Realmente se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são tais que $\mathrm{Im}(f) \subset C$, então, denotando $\mathrm{Im}(f)$ por $X$, podemos ver $f$ como uma função $\tilde{f} : A \to X$ (tal que $\tilde{f}(a) = f(a)$, para todo $a \in A$) e restringir $g$ a $X$, obtendo $g_{|X} : X \to D$; entretanto, note que, para todo $a \in A$, temos*

$$(g_{|X} \circ \tilde{f})(a) = g_{|X}(\tilde{f}(a)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

*Assim, tanto $g_{|X} \circ \tilde{f}$ quanto $g \circ f$ fazem corresponder, para cada elemento de $A$, um mesmo elemento de $D$.*

**Exemplo 2.** *Considere as funções $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. A imagem de $f$ é o conjunto $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \geq 0\} = [-1, +\infty)$. Como $\mathrm{Im}(f) = [-1, +\infty) \not\subset [0, +\infty)$, não é possível calcular a composta $g \circ f$. De outra forma, os números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 0)$ não podem pertencer ao domínio de $g \circ f$, pois, por exemplo, se $0$ estivesse nesse domínio, deveríamos ter*

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1),$$

*mas $g$ não está definida em $-1$ (pois $\sqrt{-1}$ não é um número real).*

*Por outro lado, a função composta $f \circ g$ pode ser calculada, porque a imagem de $g$, o conjunto $\mathrm{Im}(g) = [0, +\infty)$, está contida no domínio de $f$ (na verdade, neste caso, esses conjuntos são iguais). A composta $f \circ g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1.$$

O Exemplo 2 mostra que, em geral, a ordem em que as funções são consideradas na composição é importante, pois uma das compostas pode existir mas a outra não. Mais ainda, mesmo que ambas as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ existam, elas não necessariamente serão iguais, como veremos no Exemplo 3 a seguir. Em outras palavras, podemos dizer que a composição de funções **não é comutativa**.

**Exemplo 3.** *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. A imagem de $f$ é todo o conjunto $\mathbb{R}$ e a imagem de $g$ é o conjunto dos números reais não negativos. Assim, a imagem de cada função está contida no domínio da outra e as duas compostas, $f \circ g$ e $g \circ f$, podem ser consideradas. Entretanto, temos*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

*e*

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 1) \\ &= (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.\end{aligned}$$

*Logo, $f \circ g \neq g \circ f$.*

Podemos calcular também a composta de três ou mais funções, desde que as condições para a existência das compostas parciais sejam satisfeitas. Mais precisamente, dadas três funções $f : A_1 \to A_2$, $g : A_3 \to A_4$ e $h : A_5 \to A_6$, com $\mathrm{Im}(f) \subset A_3$ e $\mathrm{Im}(g) \subset A_5$, podemos considerar as compostas $h \circ g$ e $g \circ f$. Além disso, como

$$\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g) \subset A_5,$$

também podemos considerar a composta $h \circ (g \circ f)$.

Assim, a composta das três funções pode, a princípio, ser obtida de duas maneiras: $(h \circ g) \circ f$ ou $h \circ (g \circ f)$. Mas, se $x \in A_1$, então

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

e

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Dessa forma, as funções $(h \circ g) \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$ são iguais, o que demonstra que a composição de funções é **associativa**.

**Exemplo 4.** *Para cada $n \geq 1$ inteiro, seja $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a função dada por $f_n(x) = x^{1/n}$. Gostaríamos de calcular $f_2 \circ f_3 \circ f_4$. Para tanto, começamos observando que*

$$x \in [0, 1] \Rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0, 1],$$

*de sorte que $Im(f_n) \subset [0,1]$, para todo $n \geq 1$ (em verdade, $Im(f_n) = [0,1]$, mas a inclusão nos bastará). Então, realmente podemos considerar a composta $f_2 \circ f_3 \circ f_4$, e temos*

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_3 \circ f_4)(x) &= f_2(f_3(f_4(x))) = f_2(f_3(x^{1/4})) \\ &= f_2((x^{1/4})^{1/3}) = f_2(x^{1/12}) \\ &= (x^{1/12})^{1/2} = x^{1/24}.\end{aligned}$$

Seja $f : A \to B$ uma função tal que $\mathrm{Im}(f) \subset A$. Então, dado um natural $n \geq 2$, podemos compor $f$ consigo mesma $n$ vezes, obtendo a função composta $f \circ \ldots \circ f$, que denotamos por $f^{(n)}$. Neste caso, dizemos que $f^{(n)}$ pode ser obtida a partir de $f$ por **iteração**. Por *uniformidade de notação*, por vezes denotamos $f$ por $f^{(0)}$.

**Exemplo 5.** *Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Como $x > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} > 0$, podemos calcular a $n-$ésima função iterada $f^{(n)}$. Então,*

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{1}{f(x)} = \frac{2x+1}{x+1},$$

$$f^{(3)}(x) = f(f^{(2)}(x)) = 1 + \frac{1}{f^{(2)}(x)} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1}.$$

*Continuando, obtemos $f^{(4)}(x) = \frac{5x+3}{3x+2}$, $f^{(5)}(x) = \frac{8x+5}{5x+3}$ e, em geral,*

$$f^{(n)}(x) = \frac{F_{n+1}x + F_n}{F_n x + F_{n-1}},$$

*onde $F_n$ é o $n-$ésimo termo da sequência de Fibonacci: $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e, para cada $n \geq 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.*

**Exemplo 6.** *Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a função que aplica cada par ordenado $(x, y)$ no par ordenado $(-y, x)$, ou seja, tal que*

$$f(x, y) = (-y, x),$$

*para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Calcule $f^{(2019)}(x, y)$.*

**Solução.** Cada aplicação de $f$ age sobre o par ordenado $(x, y)$ de duas formas: há uma troca de posição entre as coordenadas e uma troca de sinal da primeira coordenada. Vamos calcular as quatro primeiras compostas:

$$f^{(2)}(x, y) = f(f(x, y)) = f(-y, x) = (-x, -y).$$

$$f^{(3)}(x, y) = f(f^{(2)}(x, y)) = f(-x, -y) = (y, -x).$$

$$f^{(4)}(x, y) = f(f^{(3)}(x, y)) = f(y, -x) = (x, y).$$

Isso significa que, a cada quatro aplicações de $f$ sobre um par ordenado $(x, y)$, voltamos ao mesmo par inicial $(x, y)$. Assim, $f^{(4)}(x, y) = (x, y)$, $f^{(8)}(x, y) = (x, y)$, $f^{(12)}(x, y) = (x, y)$, etc. Em geral, $f^{(n)}(x, y) = (x, y)$ sempre que $n$ for um múltiplo de 4. O múltiplo de 4 mais próximo de 2019 é 2016. Logo, $f^{(2016)}(x, y) = (x, y)$ e

$$f^{(2019)}(x, y) = f^{(3)}(f^{(2016)}(x, y)) = f^{(3)}(x, y) = (y, -x).$$

$\square$

Seja $A$ um conjunto não vazio. A função $I_A : A \to A$, dada por $I_A(a) = a$ para todo $a \in A$, é chamada **função identidade de $A$**. Essa função tem a seguinte propriedade em relação à composição: se $f : A \to B$ e $g : C \to A$ são funções quaisquer, então $f \circ I_A = f$ e $I_A \circ g = g$. De fato, para todos $a \in A$, $c \in C$, temos

$$(f \circ I_A)(a) = f(I_A(a)) = f(a)$$

e

$$(I_A \circ g)(c) = I_A(g(c)) = g(c).$$

Uma função $f : A \to A$ é chamada **involução**, se $f \circ f = I_A$.

**Exemplo 7.** *Não é difícil verificar que as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x$, e $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, dada por $g(x) = 1/x$, são involuções. Esse também é o caso da função reflexão $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por $r(x, y) = (y, x)$.*

Se $f : A \to A$ é uma função cujo domínio e contradomínio são iguais, dizemos que $a \in A$ é um **ponto fixo de $f$** se $f(a) = a$. Se existe um número natural $n$ tal que $f^{(n)}(a) = a$ e $f^{(k)}(a) \neq a$ para $1 \leq k < n$, dizemos que $a$ é um **ponto periódico** de **período** $n$. Dessa forma, pontos fixos são pontos periódicos de período 1.

No Exemplo 5, $f(x) = x$ implica que $x = 1 + \frac{1}{x}$, ou seja, $x^2 - x - 1 = 0$. Como $x$ deve ser positivo,temos que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Assim, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o único ponto fixo de $f$.

No Exemplo 6, a origem $(0, 0)$ é o único ponto fixo de $f$, e todos os outros pontos são periódicos, de período 4.

No Exemplo 7, os pontos fixos da função $r$ são os que satisfazem $(y, x) = r(x, y) = (x, y)$, ou seja, são os pontos da reta $y = x$. Os demais pontos são periódicos de período 2.

## 2 Inversa de uma função

Seja $f : A \to B$ uma função dada. Dizemos que $f$ é **injetiva** se elementos distintos do domínio têm imagens distintas, ou seja, se, para todos $a, a' \in A$ distintos, tivermos $f(a) \neq f(a')$. De modo equivalente, podemos dizer que $f$ é injetiva se, dados $a, a' \in A$ tais que $f(a) = f(a')$, tivermos $a = a'$.

Se existe uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$, dizemos que $g$ é uma **inversa à esquerda** para $f$. Temos o seguinte resultado.

**Teorema 8.** *Uma função admite inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.*

**Prova.** Suponha que $f : A \to B$ admite inversa à esquerda, ou seja, que existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$. Se $a, a' \in A$ são tais que $f(a) = f(a')$, então $g(f(a)) = g(f(a'))$ ou, o que é o mesmo, $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Então, $I_A(a) = I_A(a')$, logo, $a = a'$. Assim, $f$ é injetiva.

Reciprocamente, suponha que $f$ é injetiva e note que $\mathrm{Im}(f) \subset B$. Escolha e fixe $a_0 \in A$ e defina $g : B \to A$ pondo

$$g(b) = \begin{cases} a, & \text{se } b = f(a), \exists\, a \in A \\ a_0, & \text{se } b \in B \setminus \mathrm{Im}(f) \end{cases}. \tag{1}$$

A função $g$ está bem definida, porque, se $b = f(a)$, para algum $a \in A$, então o fato de $f$ ser injetiva garante que esse elemento $a$ é único. Também, termos $b = f(a)$, para algum $a \in A$, é o mesmo que $b \in \mathrm{Im}(f)$, de sorte que a condição complementar é, realmente, $b \in B \setminus \mathrm{Im}(f)$.

A composta $g \circ f : A \to A$ é dada, para $a \in A$, por

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a.$$

(A última igualdade acima segue do fato de que $f(a) \in \mathrm{Im}(f)$, de sorte que devemos aplicar a primeira alternativa em (1) para calcular $g(f(a))$.) Logo, $g \circ f = I_A$. Assim, $g$ é uma inversa à esquerda para $f$

Observe que a função $g$ não é única e depende da escolha do elemento $a_0 \in A$ que é imagem dos elementos de $B$ que não pertencem à imagem de $f$. $\square$

**Exemplo 9.** *Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Encontre duas funções distintas $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ e $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ tais que $g(f(x)) = x$ e $h(f(x)) = x$, para todo $x \geq 0$.*

**Solução.** A função $f$ é injetiva, pois, dados $a, b \in [0, +\infty)$ tais que $f(a) = f(b)$, temos que $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, logo, $a = b$. Sendo injetiva, $f$ admite uma inversa à esquerda, pelo teorema anterior. Como vimos na demonstração desse teorema, essa inversa não é única.

Uma escolha óbvia para uma inversa à esquerda para $f$ é $g(x) = x^2$. De fato, $g$ está definida em todo o intervalo $[0, +\infty)$ (que é a imagem de $f$) e

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Outra escolha, que fornece uma inversa à esquerda para $f$ diferente de $g$, é dada por

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Como $h(f(x)) = h(\sqrt{x})$ e $\sqrt{x} \geq 0$, temos que

$$h(f(x)) = h(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Por fim, $g$ e $h$ são funções claramente distintas, pois, por exemplo, $g(-1) = (-1)^2 = 1$ e $h(-1) = 0$. $\square$

Uma função $f : A \to B$ é chamada **sobrejetiva** se $\mathrm{Im}(f) = B$, ou seja, se todo elemento do contradomínio $B$ é imagem, por $f$, de algum elemento do domínio $A$.

Se existe uma função $h : B \to A$ tal que $f \circ h = I_B$, dizemos que $h$ é uma **inversa à direita** para $f$. Temos:

**Teorema 10.** *Uma função admite inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva.*

**Prova.** Suponha que $f : A \to B$ admite inversa à direita, ou seja, que existe $h : B \to A$ tal que $f \circ h = I_B$. Sejam $b \in B$ e $a = h(b)$. Então,

$$f(a) = f(h(b)) = (f \circ h)(b) = I_B(b) = b,$$

ou seja, todo elemento $b \in B$ é da forma $b = f(a)$, com $a \in A$, o que significa que $f$ é sobrejetiva.

Reciprocamente, se $f$ é sobrejetiva, então, para cada $b \in B$, o conjunto $U(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ não é vazio. Seja $h : B \to A$ uma função que *escolhe*, em cada $U(b)$, um elemento $a = h(b)$. Evidentemente, se pelo menos um dos conjuntos $U(b)$ tiver mais de um elemento, então a função $h$ não é única. No caso em que há uma infinidade de conjuntos $U(b)$, a existência de $h$ não é imediata, e é garantida por um axioma da Teoria dos Conjuntos, chamado *Axioma da Escolha*.

Fixada uma função $h : B \to A$ construída como acima, vamos determinar $f \circ h$. Dado $b \in B$, temos, pela construção de $h$, que

$$(f \circ h)(b) = f(h(b)) = f(a),$$

para um certo $a \in U(b)$. Mas, como $a \in U(b)$, temos por definição que $f(a) = b$, logo, $(f \circ h)(b) = b$. Por fim, como isso ocorre para todo $b \in B$, concluímos que $f \circ h = I_B$. $\square$

**Exemplo 11.** *Suponha que $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são funções tais que $f \circ g = I_B$. Mostre que $f$ é sobrejetiva e $g$ é injetiva.*

**Solução.** Como $f \circ g = I_B$, $g$ admite $f$ como inversa à esquerda, logo, é injetiva, pelo Teorema 8. A igualdade $f \circ g = I_B$ também implica que $f$ admite $g$ como inversa à direita, logo, é sobrejetiva, pelo Teorema 10. $\square$

Dizemos que uma função $f : A \to B$ é **bijetiva** se $f$ for injetiva e sobrejetiva.

Consideremos, agora, uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$, ou seja, tal que $g$ é inversa à esquerda e à direita de $f$. Nesse caso, dizemos que $g$ é uma **inversa bilateral**, ou simplesmente uma **inversa** para $f$.

**Teorema 12.** *Uma função $f : A \to B$ é bijetiva se, e somente se, admite uma inversa bilateral. Além disso, nesse caso a inversa é única, dependendo apenas de $f$.*

**Prova.** Se $f : A \to B$ admite inversa bilateral, então $f$ tem uma inversa à direita. Portanto, pelo Teorema 10, $f$ é sobrejetiva. Também, como $f$ admite inversa à esquerda, temos, pelo Teorema 8, que $f$ é injetiva. Portanto, sendo injetiva e sobrejetiva, $f$ é bijetiva.

Reciprocamente, se $f$ é bijetiva, então os teoremas 8 e 10 garantem a existência de funções $g : B \to A$ e $h : B \to A$ tais que $g \circ f = I_A$ e $f \circ h = I_B$. Assim, a associatividade da composição de funções dá

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h.$$

Isso mostra que $g = h$, ou seja, que $f$ admite uma inversa bilateral.

Suponha, agora, que $g_1 : B \to A$ e $g_2 : B \to A$ são duas inversas bilaterais para $f$. Então,

$$g_1 = g_1 \circ I_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = I_A \circ g_2 = g_2.$$

Isso mostra que há apenas uma inversa bilateral. □

Graças ao teorema anterior, se $f : A \to B$ for bijetiva, denotamos sua inversa por $f^{-1}$.

**Observação 13.** *Ainda em relação ao teorema anterior, se $f : A \to B$ é bijetiva, o "*expoente*" superior $-1$ é* simplesmente uma notação, *que é utilizada por analogia com a notação $x^{-1}$ para o inverso multiplicativo $\frac{1}{x}$ de um real não nulo $x$. Em particular,* $\boldsymbol{f^{-1}}$ **não significa** $\boldsymbol{\frac{1}{f}}$.

## Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

Os exemplos 5 e 6 são importantes porque tratam da iteração de uma função, que é a composição de uma função com ela mesma um número finito de vezes.

A discussão no final da seção 1, sobre pontos periódicos, pode ser explorada mais a fundo com os recursos do Cálculo. Por exemplo, se $f : [a, b] \to [a, b]$ é uma função *contínua*, então existe um ponto fixo de $f$ no intervalo $[a, b]$. Esse resultado pode ser demonstrado ustilizando-se o Teorema do Valor Intermediário.

Um resultado bem mais profundo sobre períodos de funções contínuas é conhecido como Teorema de Sarkovsky. Pode-se concluir, a partir desse teorema, que, se uma função $f$, dada como no parágrafo anterior, tem um ponto periódico de período 3, então ela tem pontos periódicos com todos os períodos possíveis. Outra consequência do Teorema de Sarkovsky é que se a função $f$ possuir apenas um número finito de pontos periódicos, então todos eles terão períodos que são potências de 2.

Você pode comentar esses fatos com seus alunos, à guisa de motivação, principalmente se eles estiverem sendo preparados para um curso de Cálculo. Entretanto, a demonstração do Teorema de Sarkovsky está além dos objetivos de um curso introdutório de Cálculo. Uma prova pode ser encontrada na sugestão de leitura complementar [3].

A sugestão de leitura complementar [1] aborda certas funções específicas, como as funções afins, quadráticas e exponenciais. Já sugestão de leitura complementar [2] tem uma abordagem mais próxima da que adotamos aqui, exibindo propriedades gerais da composição de funções, inclusive algumas que não exibimos aqui.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
3. W. de Melo. *Lectures on the One-dimensional Dynamics.* 17° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1989.