

Material Teórico - Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas

Redução ao Primeiro Quadrante

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de janeiro de 2019



1 Redução ao Primeiro Quadrante

Nó módulo “Círculo Trigonométrico”, também do primeiro ano, aprendemos que esse círculo é aquele de raio 1 com centro na origem, o ponto $O = (0,0)$, do plano cartesiano. Consideramos o ponto $A = (1,0)$ e, dado um comprimento β de um arco, marcamos o ponto P sobre o círculo trigonométrico tal que \widehat{AP} mede β . Assim fazendo, definimos os números $\cos \beta$ e $\sin \beta$ de tal sorte que

$$P = (\cos \beta, \sin \beta). \quad (1)$$

Note que, aqui, escrevemos simplesmente $\sin \beta$ no lugar de $\sin(\beta)$, apenas pelo fato de a primeira notação ser mais compacta. Ambas essas notações têm o mesmo significado, mas a primeira deve ser usada com cautela, especialmente em expressões longas, para não haver risco de ambiguidades.

Quando $0 < \beta < \pi/2$, podemos construir um triângulo retângulo com um ângulo interno de medida β radianos e, portanto, com os outros dois ângulos internos medindo $\pi/2$ e $\pi/2 - \beta$ (lembre-se de que $\pi/2$ radianos corresponde a 90°).

Conforme estudado no módulo “Razões Trigonômicas no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente” do Nono Ano do EF, em um tal triângulo temos:

$$\sin \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\cos \beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}.$$

Ademais, se escolhermos tal triângulo de modo que a medida de sua hipotenusa seja igual a 1, teremos $\sin \beta$ e $\cos \beta$ como as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a β , respectivamente. A Figura 1, mostra como escolher tal triângulo fazendo com que sua hipotenusa coincida com um raio do círculo trigonométrico.

Contudo, quando β não pertence ao intervalo aberto $(0, \frac{\pi}{2})$, não existe triângulo retângulo com um ângulo interno de medida β radianos. Neste caso, podemos usar a técnica de redução ao primeiro quadrante para calcular o seno, o cosseno e a tangente de β . Essa técnica já foi esboçada no módulo Círculo Trigonométrico, mas a repetiremos aqui adicionando mais detalhes e exemplos. A ideia é, a partir de β , obter um certo ângulo α entre 0 e $\pi/2$ e relacionar os valores de $\sin \beta$ e $\cos \beta$ com os de $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

Lembre-se de que os eixos do plano cartesiano dividem o Círculo Trigonométrico em quatro partes. Cada parte é denominada um *quadrante* e, por convenção, os quadrantes são numerados de I até IV (um até quatro em algarismos

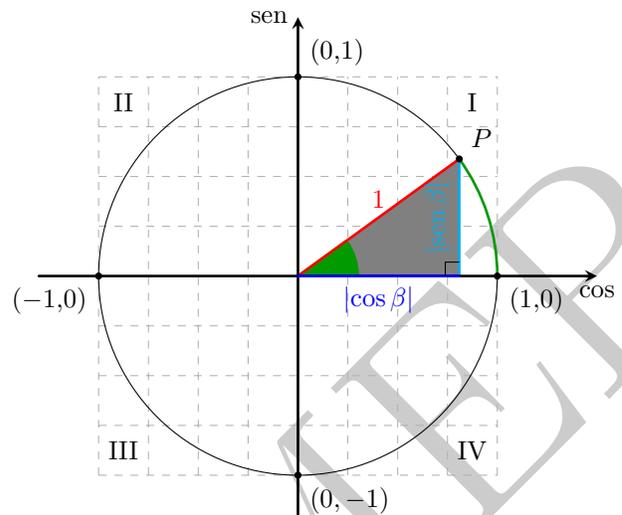


Figura 1: seno e cosseno no primeiro quadrante.

romanos, respectivamente) em sentido anti-horário, sendo o primeiro quadrante aquele formado pelos pontos em que ambas as coordenadas são positivas (veja os numerais I, II, III, IV na Figura 1).

Sem perda da generalidade, assumamos que $0 < \beta < 2\pi$. (Não sendo esse o caso, podemos substituir β por sua menor determinação positiva, conforme estudado na primeira aula do módulo “Círculo Trigonométrico”.) Como antes, assumamos que $\beta = \widehat{AP}$ e vamos considerar separadamente os casos em que P se encontra em cada um dos quatro quadrantes. Em cada caso, definiremos um ponto Q e tomaremos $\alpha = \widehat{AQ}$. Com uma escolha adequada de Q , teremos

$$|\sin \beta| = \sin \alpha \quad \text{e} \quad |\cos \beta| = \cos \alpha.$$

Observe que podemos encontrar os sinais de $\sin \beta$ e $\cos \beta$ dependendo do quadrante de P .

1.1 Do segundo ao primeiro quadrante

A Figura 2 mostra um exemplo com P no segundo quadrante, isto é, com $\pi/2 < \beta < \pi$. Veja que, neste caso, temos $\cos \beta < 0$ e $\sin \beta > 0$. Denotando por B o pé da perpendicular baixada de P ao eixo x , temos

$$\overline{PB} = \sin \beta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = -\cos \beta.$$

Vamos escolher o ponto Q como sendo o simétrico de P em relação ao eixo y (veja a Figura 2); assim, como $P = (\cos \beta, \sin \beta)$, temos $Q = (-\cos \beta, \sin \beta)$. Por outro lado, sendo $\alpha = \widehat{AQ}$, também temos $Q = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Comparando as duas expressões para as coordenadas do ponto Q , obtemos

$$\sin \beta = \sin \alpha \quad \text{e} \quad \cos \beta = -\cos \alpha.$$

Agora, seja B' o pé da perpendicular baixada de Q ao eixo x (observe novamente a Figura 2). A simetria entre P e Q em relação ao eixo y assegura a simetria de B e B' em relação ao mesmo eixo, de modo que os triângulos OPB e OQB' são congruentes, pelo caso “lado, lado, lado”. Logo, $\widehat{POB} = \widehat{QOB'}$. Por outro lado, $\widehat{POB} = \pi - \beta$. Portanto,

$$\alpha = \widehat{AQ} = \widehat{QOB'} = \widehat{POB} = \pi - \beta.$$

Substituindo essa expressão para α nas expressões que relacionam $\sin \alpha$ com $\sin \beta$ e $\cos \alpha$ com $\cos \beta$, concluímos que

$$\sin \beta = \sin(\pi - \beta) \quad \text{e} \quad \cos \beta = -\cos(\pi - \beta). \quad (2)$$

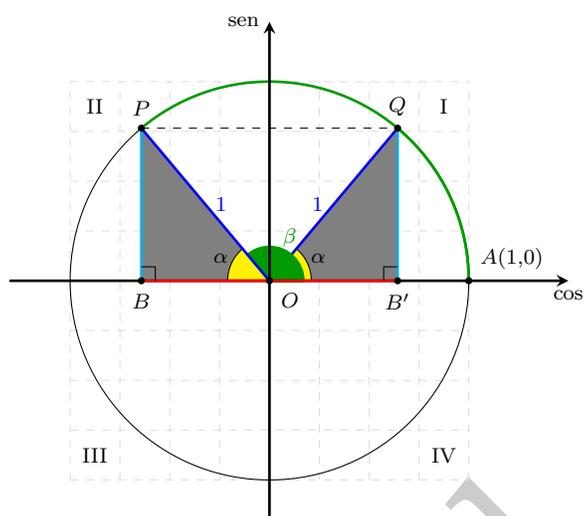


Figura 2: seno e cosseno no segundo quadrante.

Observação 1. É possível mostrar que as equações em (2) são válidas para qualquer valor de β (contudo, apenas no caso em β está no segundo quadrante é que temos $\pi - \beta$ situado no primeiro quadrante).

A partir das fórmulas (2) e levando em consideração a observação acima, temos também

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{-\cos(\pi - \beta)} = -\operatorname{tg}(\pi - \beta),$$

para todo valor de β tal que $\cos \beta \neq 0$.

1.2 Do terceiro ao primeiro quadrante

A Figura 3 mostra um exemplo com P no terceiro quadrante, isto é, com $\pi < \beta < 3\pi/2$. Assim sendo, temos $\cos \beta < 0$ e $\sin \beta < 0$. Logo, para o ponto B como antes (isto é, para B sendo o pé da perpendicular baixada de P ao eixo x), temos

$$\overline{PB} = -\sin \beta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = -\cos \beta.$$

Desta vez, vamos escolher Q como sendo o simétrico de P em relação à origem O do plano cartesiano (veja a Figura 2). Em particular, Q pertence ao primeiro quadrante e os pontos P , O e Q são colineares. Assim, como $P = (\cos \beta, \sin \beta)$, temos que $Q = (-\cos \beta, -\sin \beta)$. Agora, sendo $\alpha = \widehat{AQ}$, também podemos escrever $Q = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Comparando novamente as duas expressões acima para as coordenadas de Q , obtemos

$$\sin \beta = -\sin \alpha \quad \text{e} \quad \cos \beta = -\cos \alpha.$$

Também como antes, seja B' o pé da perpendicular de Q traçada ao eixo x . Veja que $\widehat{POB} = \widehat{QOB'}$, pois estes são ângulos opostos pelos vértice. Por outro lado, $\widehat{POB} = \beta - \pi$, de sorte que

$$\alpha = \widehat{AQ} = \widehat{POB} = \beta - \pi.$$

Substituindo essa expressão para α nas relações entre $\sin \alpha$, $\sin \beta$ e $\cos \alpha$, $\cos \beta$, chegamos a

$$\sin \beta = \sin(\beta - \pi) \quad \text{e} \quad \cos \beta = -\cos(\beta - \pi). \quad (3)$$

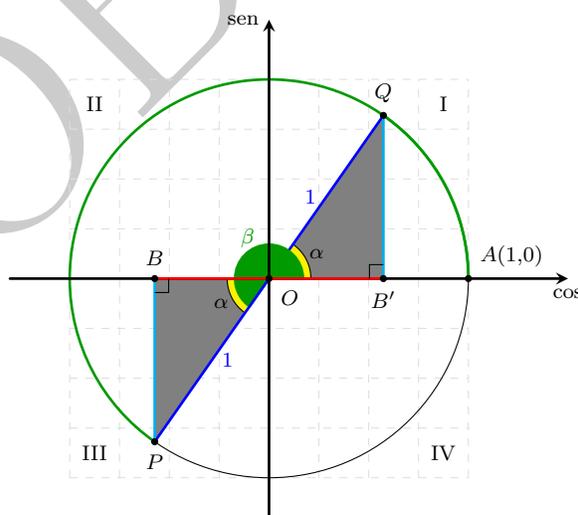


Figura 3: seno e cosseno no terceiro quadrante.

Temos também que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-\sin(\beta - \pi)}{-\cos(\beta - \pi)} = \operatorname{tg}(\beta - \pi).$$

Uma vez que $\beta = \pi + \alpha$, isso também equivale a

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha).$$

Observação 2. O argumento deste caso é essencialmente o mesmo do caso anterior. Porém, o fato de P estar no terceiro quadrante faz com que os sinais de $\sin \beta$ e $\cos \beta$ sejam diferentes comparados ao caso anterior, assim como a relação entre β e α é diferente.

Também é possível mostrar que as equações em (3), assim como a relação entre $\operatorname{tg} \alpha$ e $\operatorname{tg} \beta$ são válidas para qualquer valor de β (a última delas contanto que $\cos \beta \neq 0$). Mas, apenas no caso em β está no terceiro quadrante, temos que $\beta - \pi$ está no primeiro quadrante.

1.3 Do quarto ao primeiro quadrante

Como último caso, a Figura 4 mostra um exemplo com P no quarto quadrante, isto é, com $3\pi/2 < \beta < 2\pi$. Veja que, desta feita, temos $\cos \beta > 0$ e $\operatorname{sen} \beta < 0$. Logo, definindo o ponto B como antes, temos

$$\overline{PB} = -\operatorname{sen} \beta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = \cos \beta.$$

Escolhendo o ponto Q como o simétrico de P em relação ao eixo x (veja a Figura 4), temos Q situado no primeiro quadrante. Ainda pela simetria, juntamente com o fato de que $P = (\cos \beta, \operatorname{sen} \beta)$, obtemos $Q = (\cos \beta, -\operatorname{sen} \beta)$. Por outro lado, sendo $\alpha = \widehat{AQ}$, também temos $Q = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$. Assim, comparando as duas expressões para as coordenadas de Q , vem

$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad \cos \beta = \cos \alpha.$$

Neste caso, o pé B' da perpendicular baixada de Q ao eixo x coincide com o ponto B . Então, os triângulos OPB e OQB são congruentes pelo caso “lado, lado, lado”, de sorte que $\widehat{POB} = \widehat{QOB}$.

Por outro lado, $\widehat{POB} = 2\pi - \beta$. Portanto,

$$\alpha = \widehat{AQ} = \widehat{QOB} = \widehat{POB} = 2\pi - \beta.$$

Concluimos, pois, que

$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen}(2\pi - \beta) \quad \text{e} \quad \cos \beta = \cos(2\pi - \beta). \quad (4)$$

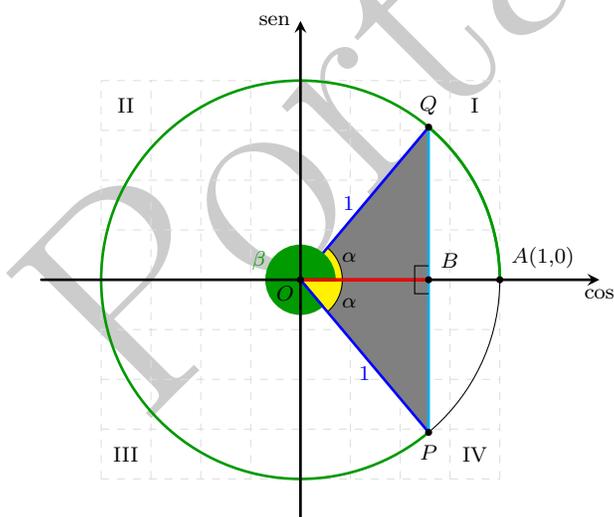


Figura 4: seno e cosseno no quarto quadrante.

Temos também que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{-\operatorname{sen}(2\pi - \beta)}{\cos(2\pi - \beta)} = -\operatorname{tg}(2\pi - \beta).$$

Observação 3. Como nos outros casos, as equações em (4) também valem para qualquer arco β (no caso da tangente, contanto que $\cos \beta \neq 0$). Contudo, o caso em que β está no terceiro quadrante é interessante pois $2\pi - \beta$ está no primeiro quadrante.

Antes de examinarmos alguns exercícios, cumpre traduzirmos as fórmulas obtidas nas subseções anteriores, de radianos para graus. Fazemos isto no exemplo a seguir.

Exemplo 4. Traduza de radianos para graus as relações (2), (3) e (4) obtidas nas subseções acima.

Solução. Lembre-se de que π radianos equivalem a 180° .

Assim, para β no segundo quadrante temos, em graus, $90^\circ < \beta < 180^\circ$. Ao reduzir ao primeiro quadrante, escolhamos $\alpha = 180^\circ - \beta$, de modo que

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}(180^\circ - \beta) \quad \text{e} \quad \cos \beta = -\cos(180^\circ - \beta).$$

Quando β está no terceiro quadrante, temos em graus que $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Neste caso, $\alpha = \beta - 180^\circ$ está no primeiro quadrante e satisfaz

$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen}(\beta - 180^\circ) \quad \text{e} \quad \cos \beta = -\cos(\beta - 180^\circ).$$

Por fim, quando β está no quarto quadrante, temos em graus que $270^\circ < \beta < 360^\circ$. Também, o arco $\alpha = 360^\circ - \beta$ está no primeiro quadrante e satisfaz

$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen}(360^\circ - \beta) \quad \text{e} \quad \cos \beta = \cos(360^\circ - \beta).$$

□

2 Exercícios

Para os exercícios seguintes sugerimos que, antes de ler suas soluções, o leitor desenhe os ângulos envolvidos sobre o Círculo Trigonométrico e use as devidas simetrias, no lugar de simplesmente utilizar as fórmulas apresentadas na seção anterior. Abaixo, relembremos os valores do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis.

Ângulo (graus)	Ângulo (radianos)	sen	cos	tg
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	\nexists

Exemplo 5. Calcule os valores de $\text{sen } 120^\circ$ e $\text{cos } 120^\circ$.

Solução. Veja que 120° pertence ao segundo quadrante, pois $90^\circ < 120^\circ < 180^\circ$. Assim, de acordo com a Figura 2, ao reduzir 120° para o primeiro quadrante, obtemos um ângulo de 60° . De acordo com a tabela anterior, $\text{sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2$ e $\text{cos } 60^\circ = 1/2$. Mas, como $\text{sen } 120^\circ > 0$ e $\text{cos } 120^\circ < 0$, temos que:

$$\text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\text{cos } 120^\circ = -\text{cos } 60^\circ = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

Exemplo 6. Calcule os valores de $\text{sen}(5\pi/6)$ e $\text{cos}(5\pi/6)$.

Solução. Veja que $5\pi/6$ pertence ao segundo quadrante, pois está entre $\pi/2$ e π . Como no problema anterior, observando a Figura 2, reduzimos esse arco ao arco do primeiro quadrante $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$. Por outro lado, sabemos que $\text{sen}(\pi/6) = 1/2$ e $\text{cos}(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Então, como $\text{sen}(5\pi/6) > 0$ e $\text{cos}(5\pi/6) < 0$, temos:

$$\text{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{cos}(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

Exemplo 7. Qual o valor de $\text{tg}(5\pi/4)$?

Solução. Veja que $\pi < 5\pi/4 < 3\pi/2$, logo, $5\pi/4$ pertence ao terceiro quadrante; então, $\text{tg}(5\pi/4) > 0$. De acordo com Figura 3, ao reduzir $5\pi/4$ ao primeiro quadrante, obtemos $\alpha = 5\pi/4 - \pi = \pi/4$. Logo,

$$\text{tg}(5\pi/4) = \text{tg}(\pi/4) = 1. \quad \square$$

Exemplo 8. Encontre o ângulo α tal que $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$,

$$\text{sen } \alpha = -\text{sen } 216^\circ \quad \text{e} \quad \text{cos } \alpha = \text{cos } 216^\circ.$$

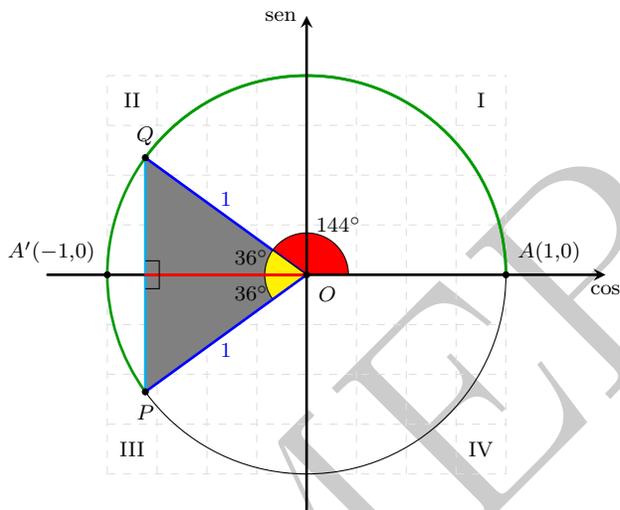
Solução. Essa pergunta é diferente das anteriores, mas podemos atacá-la de maneira similar. Primeiro, vamos identificar o quadrante de 216° . Como $180^\circ < 216^\circ < 270^\circ$, temos $\text{sen}(216) < 0$ e $\text{cos}(216) < 0$. Então, as igualdades do enunciado garantem que $\text{sen}(\alpha) > 0$ e $\text{cos}(\alpha) < 0$. Isso, juntamente com $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$, indica que α pertence ao segundo quadrante.

Sejam $A = (1,0)$, $A' = (-1,0)$ e P o ponto do Círculo Trigonômico tal que $\widehat{AOP} = 216^\circ$ (com o arco \widehat{AP} medido no sentido anti-horário, de A para P). Agora, observe que a redução de 216° ao primeiro quadrante é $216^\circ - 180^\circ = 36^\circ$.

A fim de obter o ponto do segundo quadrante correspondente a α , tomemos Q como o simétrico de P em relação ao eixo x (veja a figura a seguir). Temos que $\widehat{QOA'} = \widehat{A'OP} = 36^\circ$. Daí, $\widehat{AOQ} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

Por fim, veja que $\alpha = 144^\circ$ satisfaz as condições do enunciado, pois

$$\text{sen } 144^\circ = -\text{sen } 216^\circ \quad \text{e} \quad \text{cos } 144^\circ = \text{cos } 216^\circ. \quad \square$$



Exemplo 9. Se $R = \text{sen } 130^\circ + \text{cos } 130^\circ$. Decida, com justificativa, se R é positivo, negativo ou igual a zero.

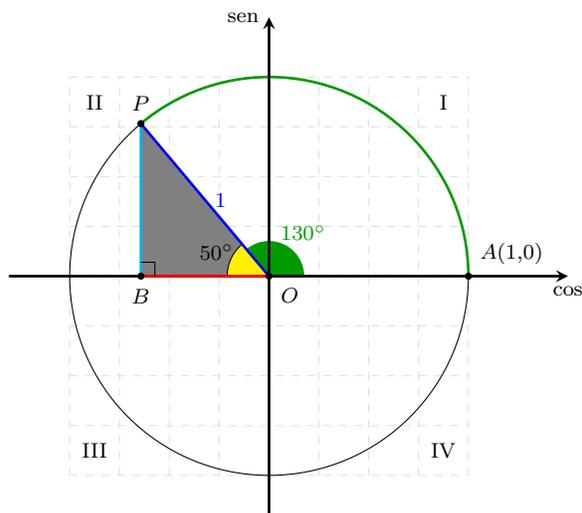
Solução. A figura seguinte nos mostra um ângulo de 130° , juntamente com o arco correspondente sobre o Círculo Trigonômico. Veja que $\text{sen } 130^\circ > 0$ enquanto que $\text{cos } 130^\circ < 0$. Se B é o pé da perpendicular de P traçada ao eixo x , temos

$$\overline{PB} = \text{sen } 130^\circ \quad \text{e} \quad \overline{BO} = -\text{cos } 130^\circ.$$

Logo,

$$R = \overline{PB} - \overline{BO}.$$

No triângulo PBO , temos que $\widehat{POB} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$, de sorte que $\widehat{BPO} = 40^\circ$. Como o menor lado de um triângulo é o oposto ao seu menor ângulo, concluímos que $\overline{BO} < \overline{PB}$. Logo, $R > 0$.



Exemplo 10. Calcule os valores de $\sin 1410^\circ$, $\cos 1410^\circ$ e $\operatorname{tg} 1410^\circ$.

Solução. Neste caso, vamos primeiro calcular a menor determinação positiva de 1410° . Para isso, começamos dividindo 1410 por 360 , obtendo

$$1410 = 3 \cdot 360 + 330.$$

Logo, 1410° e 330° são congruentes, de modo que

$$\sin 1410^\circ = \sin 330^\circ \quad \text{e} \quad \cos 1410^\circ = \cos 330^\circ.$$

Agora, basta reduzir 330° ao primeiro quadrante. Observando que $270^\circ < 330^\circ < 360^\circ$, vemos que o arco correspondente a 330° pertence ao quarto quadrante. Então, revisitando a Figura 4, vemos que devemos tomar $\alpha = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$. Dessa forma, segue que

$$\sin 1410^\circ = \sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\cos 1410^\circ = \cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} 1410^\circ = \operatorname{tg} 330^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \square$$

Exemplo 11. Lembre-se de que arcos complementares são aqueles cuja soma é igual a $\pi/2$ e suplementares são aqueles cuja soma é igual a π . Sabendo que α e β são complementares e que β e γ são suplementares, com $\cos \gamma \neq 0$, calcule a razão entre $\sin \alpha$ e $\cos \gamma$.

Solução. Como α e β são complementares, temos que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. No Módulo “Círculo Trigonométrico” vimos que isso implica que $\sin \alpha = \cos \beta$.

Agora, β e γ satisfazem $\beta + \gamma = \pi$, de sorte que (2) fornece $\cos \beta = -\cos \gamma$. Então, $\sin \alpha = -\cos \gamma$ e a razão pedida é igual a

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \gamma} = \frac{\sin \alpha}{-\sin \alpha} = -1. \quad \square$$

Exemplo 12. Sabendo que $\sin \alpha = 3/5$ e que α pertence ao segundo quadrante, calcule os valores de $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$.

Solução. Recordemos que, pela relação fundamental, tem-se

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Logo,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \implies \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

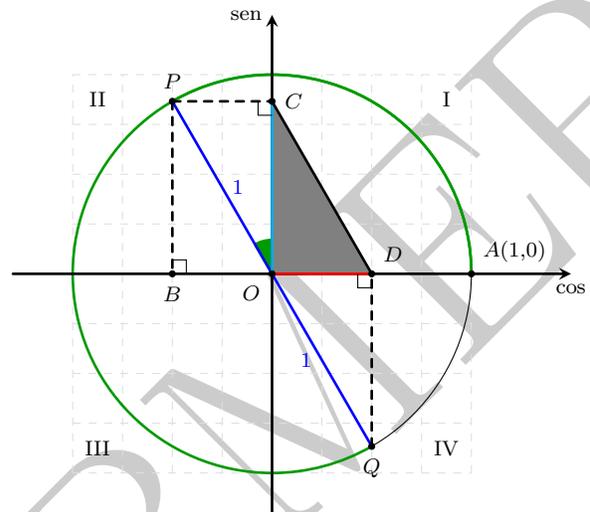
Como α pertence ao segundo quadrante, temos $\cos \alpha < 0$. Assim,

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Por fim, temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}. \quad \square$$

Exemplo 13. Na figura a seguir, temos um círculo de raio 1, com centro em O , e sabemos que os pontos P , O e Q são colineares. Sabendo que o arco trigonométrico \widehat{AP} mede $2\pi/3$ radianos, calcule a área do triângulo OCD .



Solução 1. Inicialmente, observe que $2\pi/3$ radianos correspondem a 120° . Então, temos

$$\overline{OC} = |\sin(120^\circ)| \quad \text{e} \quad \overline{OD} = |\cos(120^\circ)|.$$

Conforme calculado no Exemplo 5, tais igualdades fornecem

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{OD} = \frac{1}{2}.$$

Como P , O e Q são colineares, temos $\widehat{POB} = \widehat{DOQ}$, pois são opostos pelo vértice. Consequentemente, seus complementos também são iguais, isto é, $\widehat{BPO} = \widehat{DQO}$. Mas, como $\overline{PO} = \overline{QO}$, segue que os triângulos OPB e QOD são congruentes, pelo caso “ângulo, lado, ângulo”. Logo, $\overline{OD} = \overline{OB}$.

Assim, a área do triângulo OCD é igual a:

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \quad \square$$

Solução 2. Temos $\widehat{COP} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. Como $\overline{OP} = 1$, observando o triângulo COP temos

$$\overline{PC} = \sin 30^\circ \quad \text{e} \quad \overline{OC} = \cos 30^\circ.$$

Logo,

$$\overline{PC} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como na solução anterior, concluímos que os triângulos COP e DOQ são congruentes. Então, $\overline{OD} = \overline{PC}$ e podemos calcular a área de OCD da mesma forma que na primeira solução. \square

Exemplo 14. Sabendo que α , β e γ são os ângulos de um triângulo não retângulo, calcule o valor numérico da expressão

$$R = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \gamma} + \operatorname{tg}(\alpha + \beta + 2\gamma) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$$

Solução. Temos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Logo,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\pi - \gamma) = \operatorname{sen} \gamma$$

e, daí,

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \gamma} = 1.$$

Por outro lado,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + 2\gamma) = \operatorname{tg}(\pi + \gamma) = \operatorname{tg} \gamma,$$

ao passo que

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi - \gamma)} = \frac{1}{-\operatorname{tg} \gamma}.$$

(Note que os cálculos acima têm sentido, uma vez que $\gamma \neq 90^\circ \Rightarrow \cos \gamma \neq 0$.) Combinando os dois últimos resultados, temos que

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + 2\gamma) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{-\operatorname{tg} \gamma} = -1.$$

Então, a expressão do enunciado vale

$$R = 1 - 1 = 0. \quad \square$$

Dicas para o Professor

Este módulo tem como pré-requisitos o bom entendimento das noções geométricas de simetria (em relação a uma reta ou a um ponto) e conhecimentos básicos sobre congruência de triângulos. É imprescindível fazer várias figuras e exemplos para que a redução ao primeiro quadrante se torne natural. Observe que as escolhas do ângulo α em função de β , feitas na Seção 1, são consequências naturais das simetrias encontradas. Por isso, melhor do que memorizar as relações (2), (3) e (4) é sempre tentar visualizá-las. De toda forma, após usá-las várias vezes, elas acabarão sendo memorizadas.

Recomendamos que o professor aborde o conteúdo desta aula em dois ou três encontros de 50 minutos. A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.