Material Teórico - Módulo de PROBLEMAS DOS CÍRCULOS MATEMÁTICOS - CAPÍTULOS 0 E 1

Problemas dos Capítulos 0 e 1

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

5 de Junho de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Os círculos matemáticos tiveram origem nos países da antiga União Soviética, no início do século XX. O objetivo desses projetos era explorar e mostrar a beleza da Matemática, de forma contagiante, a jovens estudantes de Ensino Fundamental e Médio.

Os círculos matemáticos foram criados por alunos de pós-graduação e professores universitários, que viajavam juntos durante os finais de semana ou durante o verão para realizar encontros nos quais havia muita discussão cooperativa entre professores e alunos.

Para motivar essas discussões, eram propostos exercícios que desafiavam a criatividade e que não necessariamente possuíam uma única solução. Além disso, muitos exercícios poderiam ser aprofundados e discutidos em níveis mais avançados.

Parte da experiência obtida ao longo de vários anos do projeto, que ocorre até hoje em muitos países, foi organizada no livro *Um Círculo Matemático de Moscou: Problemas Semana a Semana*, que conta com uma versão em Português. O livro apresenta materiais empregados no curso anual de um círculo matemático organizado pela Faculdade de Matemática da Universidade Estatal de Moscou.

Cada capítulo traz um conjunto de problemas que possuem uma estrutura similar: combinam revisões de tópicos anteriores com a introdução de um tópico novo, apresentando problemas em níveis crescentes de dificuldade. Este método, já bastante testado, tem provado sua eficácia em engajar estudantes, bem como em ajudá-los a dominar novos assuntos a partir de conhecimentos prévios.

Ao longo deste material resolveremos uma parte dos problemas propostos nos capítulos 0 e 1 do livro mencionado. Os enunciados e soluções de alguns dos problemas foram ligeiramente adaptados. Também, incluímos uma lista de problemas adicionais, que não constam no livro mas que possuem o mesmo espírito presente nos círculos matemáticos.

2 Problemas do Capítulo 0

Exercício 1. *Vovó leva 4 minutos para subir do primeiro andar até o quinto andar de um prédio. Mantendo a mesma velocidade, quanto tempo ela vai levar para chegar ao décimo andar?*

Solução. Vovó levará 9 minutos. Observe que ela sobe quatro lances de escadas para ir do primeiro ao quinto andar e sobe oito lances para ir do primeiro para o nono andar. Como trata-se do dobro de lances de escadas, ela vai levar o dobro do tempo até o nono andar, mais $4 \div 4 = 1$ minuto do nono ao décimo. □

Exercício 2. *Henrique e Mariana estão usando uma balança de farmácia com ponteiro para pesar suas mochilas. Quando pesadas separadamente, a balança mostra 3kg e 2kg. Quando são pesadas juntas, a balança mostra 6kg.*

— Isso não pode estar certo! - disse Mariana. - Dois mais três não é igual a seis.

Henrique então tira as duas mochilas e fala:

— Veja! O ponteiro da balança não está no zero! Ela está com defeito!

Quanto as mochilas pesavam, de fato?

Solução. Essa situação ocorreu pois a balança marca um peso de x quilos quando não há nada sobre ela (ao invés de marcar 0 quilos, como deve-se esperar de uma balança funcionando corretamente). Assim, cada mochila deve pesar, separadamente, $2 - x$ e $3 - x$, respectivamente.

Ao serem pesadas juntas, a balança deveria marcar $(2 - x) + (3 - x) = 5 - 2x$. Porém, como ela sempre acrescenta um valor x ao que está sendo pesado, ela marcará $(5 - 2x) + x = 5 - x$. Portanto, temos a equação

$$5 - x = 6,$$

que dá $x = -1$ como resultado.

Portanto, a balança sempre retira 1 quilo do peso real do que está sendo pesado, de sorte que as mochilas pesam 4kg e 3kg. □

Exercício 3. *Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o dedo mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anular é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e o polegar é o nono. Inverta a orientação novamente, em direção ao dedo mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar a contar dessa forma, indo e voltando com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?*

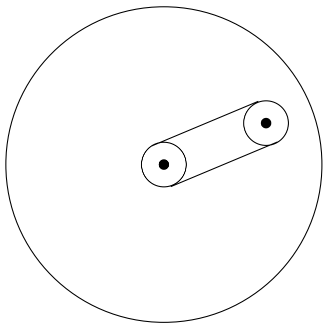
Solução. Vamos olhar os números que correspondem ao polegar. Ele começa com o número 1 , depois contamos quatro do indicador ao mindinho e quatro novamente de volta (do anular ao polegar), de modo que o próximo número associado ao polegar é $1 + 8 = 9$. O seguinte é $9 + 8 = 17$ e a cada visita subsequente ao polegar é preciso somar oito ao número anterior. Veja a tabela a seguir:

Po	In	Me	An	Mi
1	2	3	4	5
	8	7	6	
9	10	11	12	13
	16	15	14	
17	18	19	20	21

Como 1000 é divisível por 8, o polegar está associado a $1 + 8 \times 125 = 1001$. Portanto, o indicador será o milésimo. □

Exercício 4. *Um ponto é marcado dentro de um círculo. Corte o círculo em, no máximo, 2 partes de modo que, rearrumando as partes, obtenha-se um círculo centrado no ponto.*

Solução. Se o ponto for o próprio centro do círculo, não há o que fazer. Se for um outro ponto, desenhe um círculo com centro nesse ponto, de raio suficientemente pequeno para que esse círculo fique totalmente contido no maior e que um terceiro círculo, de mesmo raio que o segundo mas com centro no centro do círculo maior, não intersecte esse segundo círculo. Observe a figura a seguir:



Agora considere os segmentos tangentes externos comuns aos dois círculos de mesmo raio. O corte será ao longo das bordas externas do desenho feito no interior do círculo. Para terminar, basta girar a figura recortada em $180°$, em torno do seu centro de simetria. $\square$

Exercício 5. *Um irmão sai de sua casa 5 minutos depois de sua irmã. Se ele anda a uma velocidade igual a uma vez e meia a dela, quanto tempo levará para alcançá-la?*

Solução. No momento em que o irmão sai de casa, sua irmã está a uma determinada distância à sua frente, x metros, digamos. Então, a cada 5 minutos subsequentes, a irmã andará a mesma distância de x metros, enquanto o irmão andará $1,5x$ metros. Portanto, a cada 5 minutos, a distância entre eles diminuirá de $0,5x$ metros. Como a distância entre eles era de x metros no início, vai levar 10 minutos para o irmão alcançá-la. $\square$

Exercício 6. *Juntos, Ana, Bernardo, Carla e Davi comeram 70 bananas. Cada um comeu um número inteiro de bananas e nenhum deles deixou de comer pelo menos uma banana. Ana comeu mais do que cada um dos outros, ao passo que Bernardo e Carla comeram, juntos, 45 bananas. Quantas bananas Davi comeu?*

Solução. Como o Bernardo e o Carla comeram 45 bananas ao todo, um deles comeu pelo menos 23 bananas. Portanto, Ana comeu pelo menos 24 bananas, logo, os três juntos comeram pelo menos $24 + 45 = 69$ bananas. Mas, então, Davi comeu no máximo $70 - 69 = 1$ banana. Como o problema afirma que cada um comeu pelo menos uma banana, concluímos que Davi comeu exatamente uma banana. $\square$

3 Problemas do Capítulo 1

Exercício 7. *Uma proveta cheia até a borda com água tem 500 gramas. Com água até a metade, tem 325 gramas. Quantos gramas de água cabem na proveta?*

Solução. Se subtrairmos $500 - 325 = 175$, obtemos metade do peso da capacidade máxima de água. Assim, na proveta cabem $2 \times 175 = 350$ gramas de água. $\square$

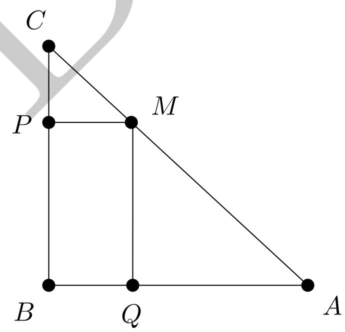
Exercício 8. *Qual o valor da diferença* $222222 \times 666667 - 444444 \times 333333$*?*

Solução. Seja $111111 = A$. Então, $222222 = 2A$, $666667 = 6A + 1$, $444444 = 4A$ e $333333 = 3A$. Assim, a expressão do enunciado é

$$2A(6A + 1) - 4A \cdot 3A = 12A + 2A - 12A = 2A.$$

Portanto, a resposta é 222222. $\square$

Exercício 9. *Dado um triângulo ABC com ângulo $\angle B = 90°$ e no qual $AB = 1$ e $BC = 1$, um ponto M é escolhido aleatoriamente em AC. É possível saber a soma das distâncias de M aos lados AB e BC?*



Solução. Sejam P e Q os pés das perpendiculares baixadas de M aos lados AB e BC do triângulo ABC. Como $PMQB$ é um quadrilátero com pelo menos três ângulos retos, concluímos que seu quarto ângulo também é reto. Logo, $PMQB$ é um retângulo, de sorte que $PM = BQ$. Além disso,

$$\begin{aligned} AB = BC &\Rightarrow \angle ACB = \angle CAB \\ &\Rightarrow \angle AMQ = \angle MAQ \\ &\Rightarrow AQ = MQ. \end{aligned}$$

Portanto,

$$MP + MQ = BQ + AQ = BA = 1.$$

$\square$

Exercício 10. *No cofre de Pedro havia menos de 100 moedas. Ele as dividiu em pilhas de 2 moedas cada, mas sobrou uma moeda. O mesmo aconteceu quando ele as dividiu em pilhas de 3, de 4 e de 5 moedas, ou seja, sempre sobrava uma moeda. Quantas moedas havia no cofre?*

Solução 1. Se pegarmos emprestada uma moeda de Pedro, ele ficará com um número de moedas de 0 a 99. Por outro lado, pelas informações dadas no enunciado, as moedas restantes podem ser divididas em pilhas com 2, 3, 4 ou 5 moedas. Como 3, 4 e 5 não têm fator comum, a quantidade de moedas restantes tem que ser divisível pelo produto desses números, que é 60. Agora, de 0 a 99 , só 0 e 60 são divisíveis por 60, de modo que Pedro tem 1 ou 61 moedas. Como o enunciado deixa claramente implícito que Pedro tinha pelo menos 3 moedas no cofre, concluímos que seu cofre continha 61 moedas. ☐

Solução 2. Como o número de moedas de Pedro, menos uma, é divisível por 2, ele é par; como é divisível por 5, termina em 0 ou 5. No entanto, esse número não pode terminar em 5 porque é par, logo, só pode ser 0, 10, 20, ..., 80 ou 90. Dentre esses últimos números, só 0, 30, 60 e 90 são divisíveis por 3 e só 0 e 60 são divisíveis por 4. Logo, Pedro tem 1 ou 61 moedas. ☐

4 Problemas Extras

Exercício 11. *Pedro e Maria formam um estranho casal. Pedro mente às quartas, quintas e sextas-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Maria mente aos domingos, segundas e terças-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia, ambos dizem: "Amanhã é dia de mentir". Em que dia da semana foi feita essa afirmação?*

Solução. Observe que a frase "Amanhã é dia de mentir" só pode ser dita em duas situações:

(a) Em um dia em que fala-se a verdade, e no dia seguinte mente-se; ou

(b) Em um dia em que mente-se, e no dia seguinte fala-se a verdade.

Agora veja que:

- Para Pedro, a primeira situação ocorre nas terças, enquanto a segunda ocorre nas sextas.
- Para Maria, a primeira situação ocorre aos sábados, enquanto a segunda ocorre nas terças.

Portanto, se ambos afirmaram que "Amanhã é dia de mentir", esse dia só pode ter sido uma terça-feira. ☐

Exercício 12. *Colorado Jones deve resolver um grande enigma para sobreviver. Ele deve remover apenas um dos cinco potes que estão à sua frente para poder abrir a porta da Câmara Secreta. Os potes contém os seguintes números escritos: 35, 37, 41, 71 e 81. Ele sabe que em cada pote existe apenas um tipo de moeda, ouro ou prata, e que o número escrito em cada pote representa a quantidade de moedas em seu interior. Além disso, o pote que deve ser removido faz com que, nos potes restantes, o número total de moedas de prata seja o dobro do número total de moedas de ouro. Qual pote deve ser removido?*

Solução. A retirada de um dos potes deve permitir que Colorado Jones consiga separar os potes restantes em dois grupos, sendo que em um desses grupos o total de moedas seja o dobro do total de moedas do outro. Portanto, se a quantidade de moedas do grupo com menos moedas for x, a soma das moedas nos dois grupos será $x + 2x = 3x$.

O argumento acima já garante que a retirada do pote correto faz a quantidade de moedas restantes ser um múltiplo de 3. A soma das quantidades de moedas dos cinco potes é $81 + 71 + 41 + 37 + 35 = 265$, que deixa resto 1 na divisão por 3. Consequentemente, para que a remoção de um pote torne esta quantidade múltipla de 3, o número nele escrito deve deixar resto 1 quando dividido por 3.

Dos números apresentados, apenas 37 possui tal propriedade. Além disso, veja que, ao retirá-lo, os potes restantes podem ser divididos em dois grupos conforme garante o enunciado: um com soma $81 + 71 = 2 \cdot 76$ e o outro com soma $35 + 41 = 76$.

Assim, Colorado Jones deve remover o pote de 37 moedas. ☐

Exercício 13. *Dez formigas caminham separadamente, em linha reta, entre dois formigueiros. Metade partiu do formigueiro da esquerda e a outra metade do da direita. Elas sempre caminham com a mesma velocidade constante e, quando duas se encontram, invertem o sentido de seus movimentos, isto é, a formiga que estava indo em direção ao formigueiro da direita passa a andar em direção ao formigueiro da esquerda e vice-versa. Quando uma formiga chega em algum formigueiro ela para de andar. Quando todas chegarem a algum formigueiro, quantos encontros terão acontecido ao longo do caminho?*

Solução. Como estamos interessados no número total de encontros, e não nos encontros de formigas específicas, podemos supor que todas as formigas são iguais e que em cada encontro uma formiga passa pela outra como se fosse um fantasma. Como existem 5 formigas de cada lado, o total de encontros é $5 \times 5 = 25$.

☐

5 Sugestões aos Professores

Ao professor que deseje criar um círculo matemático em sua escola, recomendamos, além do livro [?], os livros [?] e [?]. Neles, o professor encontrará problemas separados em conjuntos que tratam sobre um mesmo tema.

É importante que o professor entenda que a dinâmica de um encontro em um círculo matemático é diferente daquela comum às aulas ordinárias da escola. Em primeiro lugar, deve-se dar um tempo maior para que os alunos pensem em suas próprias soluções para os exercícios. Além disso, os alunos devem ser convidados a expor suas ideias (mesmo que parcialmente completas ou inconsistentes) aos colegas. A ideia é transformar a solução de um problema em um debate construtivo, em que mais de uma pessoa possa colaborar para que a turma encontre uma solução adequada.