Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas

Noções Básicas - Parte 2

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

07 de Dezembro de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Neste material, discutimos três tipos de *atributos* que uma função pode ter e que, por sua importância, merecem destaque. Ao longo da discussão, apresentamos vários exemplos para ilustrar os conceitos introduzidos.

1 Funções injetivas

Definição 1 (função injetiva). *Uma função $f : A \to B$ é **injetiva**, ou **injetora**, se quaisquer dois elementos diferentes do domínio estiverem associados a elementos diferentes do contradomínio. Em símbolos, para todos $x, x' \in A$ devemos ter que*

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'). \tag{1}$$

Vamos observar alguns dos exemplos anteriores, avaliando quais das funções são injetivas.

Exemplo 2. *No Exemplo* 1 *da Parte* 1*, assuma que a idade foi medida em anos e a altura em centímetros, e o intervalo de tempo foram, por exemplo, de* 0 *a* 8 *anos. Suponha, ainda, que a tabela a seguir registre as alturas para a criança em questão:*

Idade (anos)	*Altura (cm)*
0	48
1	73
2	86
3	95
4	102
5	108
6	113
7	119
8	125

Como idades diferentes correspondem a alturas diferentes, a função f, dada pela tabela acima, que associa a cada idade a altura de nossa criança, é injetiva.

Exemplo 3. *Observando a tabela do Exemplo* 2 *da Parte* 1*, vemos que altitudes diferentes correspondem a pressões atmosféricas diferentes. Logo, a função que fornece a pressão atmosférica para cada altura também é injetiva.*

Exemplo 4. *No Exemplo* 5 *da Parte* 1*, a função deixa de ser injetiva se uma casa receber mais de uma carta. Por outro lado, se cada casa receber no máximo uma carta, a função é injetiva.*

Exemplo 5. *No Exemplo* 6 *da Parte* 1*, a função deixa de ser injetiva se dois alunos sentarem em uma mesma cadeira. Caso alunos diferentes sentem em cadeiras diferentes, a função será injetiva.*

Em termos de diagramas de setas, o fato de uma função $f : A \to B$ ser injetiva significa que *setas que partem de elementos diferentes de A chegam em elementos diferentes de B.*

Para uma função $f : A \to B$, a validade da implicação (1) para todos $x, x' \in A$ *equivale* à validade, para todos $x, x' \in A$, da implicação

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'. \tag{2}$$

Quando $f : A \to B$ for uma função real de variável real, (2) é um modo eficiente de verificar se f é injetora. Aqui, a estratégia é, partindo da igualdade $f(x) = f(x')$, usar a fórmula que define f para deduzir que $x = x'$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6. *Mostre que toda função afim é injetiva.*

Prova. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Então,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow ax + b = ax' + b \Rightarrow ax = ax';$$

multiplicando ambos os membros por $\dfrac{1}{a}$, obtemos $x = x'$. Logo, f é injetiva. $\square$

Exemplo 7. *A* ***função de proporcionalidade inversa*** *é a função* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *dada por* $f(x) = \frac{1}{x}$*, para todo* $x > 0$*. Mostre que ela é injetiva.*

Prova. Para $x, x' > 0$, temos que

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \Rightarrow x = x'.$$

$\square$

Exemplo 8. *Seja* $f : \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ *a função dada por* $f(x) = 2x^2 - x + 5$*. Mostre que* f *é injetiva.*

Prova. Para $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, temos que

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2x_1^2 - x_1 + 5 = 2x_2^2 - x_2 + 5 \\ &\Rightarrow 2x_1^2 - x_1 = 2x_2^2 - x_2 \\ &\Rightarrow 2(x_1^2 - x_2^2) - (x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)\big(2(x_1 + x_2) - 1\big) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \text{ ou } 2(x_1 + x_2) - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 + x_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Se o primeiro caso ocorrer, teremos chegado à conclusão que queríamos; se o segundo caso ocorrer, então, uma vez que $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, teremos

$$\frac{1}{2} = x_1 + x_2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

portanto, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Assim, em qualquer caso, partindo de $f(x_1) = f(x_2)$, deduzimos que $x_1 = x_2$; logo, f é injetiva.

$\square$

Exemplo 9. *Mostre que a função* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x - \frac{1}{x}$ *é injetiva.*

Prova. Tome $x_1, x_2 > 0$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1 - \frac{1}{x_1} = x_2 - \frac{1}{x_2} \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 + \frac{-x_2 + x_1}{x_1 x_2} = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)\left(1 + \frac{1}{x_1 x_2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Como $1 + \frac{1}{x_1 x_2} > 0$, concluímos que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$\square$

Exemplo 10. *Mostre que a função* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *dada por* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *não é injetiva.*

Prova. Basta ver que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} + 2 = f(2).$$

$\square$

2 Funções sobrejetivas

Definição 11. *Uma função* $f : A \to B$ *é* ***sobrejetiva****, ou* ***sobrejetora****, se a sua imagem for igual a seu contradomínio, isto é, se cada elemento* $y \in B$ *for a imagem de algum elemento* $x \in A$*.*

Exemplo 12. *No Exemplo* 5 *da Parte 1, se cada casa de* B *receber pelo menos uma carta, então a função* $f : A \to B$ *é sobrejetiva. Se alguma casa do conjunto* B *não receber cartas, então a função* $f : A \to B$ *não é sobrejetiva.*

Exemplo 13. *No Exemplo* 6 *da Parte* 1*, se uma cadeira da sala de aula estiver vazia, então a função f não será sobrejetiva, pois essa cadeira pertencerá ao contradomínio mas não pertencerá à imagem. A imagem é formada pelas cadeiras onde há algum aluno sentado.*

Em termos de diagramas de setas, o fato de uma função $f : A \to B$ ser sobrejetiva significa que *todo elemento de B recebe pelo menos uma seta.*

Quando $f : A \to B$ for uma função real de variável real, para verificar se f é sobrejetora temos de escolher arbitrariamente um elemento $y \in B$ e verificar se existe $x \in A$. tal que $f(x) = y$. Isso, em geral, se resume a *resolver uma equação.*

Exemplo 14. *Mostre que toda função afim é sobrejetiva.*

Prova. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dado $y \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow ax = y - b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}.$$

Então, $x = \frac{y-b}{a}$ é um elemento do domínio de f tal que $f(x) = y$, logo, f é sobrejetiva. □

Exemplo 15. *Mostre que a função de proporcionalidade inversa, $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dada para $x > 0$ por $f(x) = \frac{1}{x}$, é sobrejetiva.*

Prova. Para $y > 0$, temos que

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}.$$

Como $\frac{1}{y} > 0$, segue que $x = \frac{1}{y}$ é um elemento do domínio de f tal que $f(x) = y$; logo, f é sobrejetiva. □

Exemplo 16. *Seja $f : \mathbb{R} \to \left[\frac{39}{8}, +\infty\right)$ a função dada por $f(x) = 2x^2 - x + 5$. Mostre que f é sobrejetiva.*

Prova. Para $y \in \left[\frac{39}{8}, +\infty\right)$, temos de encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, isto é, $2x^2 - x + 5 = y$. Ora, a fórmula de Báskara dá

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 5 = y &\Leftrightarrow 2x^2 - x + (5-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2(5-y)}}{2 \cdot 2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{8y - 39}}{4}. \end{aligned}$$

Como $y \geq \frac{39}{8}$ equivale a $8y - 39 \geq 0$, a raiz quadrada acima tem sentido nos reais e, daí, os números reais x dados pela igualdade $x = \frac{1 \pm \sqrt{8y-39}}{4}$ são tais que $f(x) = y$. Então, f é sobrejetiva. $\square$

Exemplo 17. *Mostre que a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - \frac{1}{x}$ é sobrejetiva.*

Prova. Dado $y \in \mathbb{R}$ precisamos encontrar $x > 0$ tal que $f(x) = y$. Mas

$$f(x) = y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = yx \Leftrightarrow x^2 - yx - 1 = 0.$$

Essa equação de segundo grau (em x) tem

$$\Delta = (-y)^2 - 4(-1) = y^2 + 4 > 0,$$

logo, tem duas raízes reais. Como o produto dessas raízes é -1, uma delas é positiva. Então, quando x é igual a essa raiz positiva, temos $f(x) = y$. $\square$

Exemplo 18. *Mostre que a função $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$ não é sobrejetiva.*

Prova. Note que $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$, para todo $x > 0$; realmente, para $x > 0$, temos

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0.$$

Portanto, nenhum real y tal que $0 < y < 2$ pertence à imagem de f. $\square$

3 Funções bijetivas

Esta seção lida com as funções que são simultaneamente injetoras e bijetoras. A definição relevante é a que segue.

Definição 19. *Uma função $f : A \to B$ é* ***bijetiva*** *ou* ***bijetora*** *se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.*

Uma vez que ser bijetora é ser ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, podemos revisitar facilmente os exemplos das duas seções anteriores, verificando, em cada caso, se a função em questão é bijetora.

Exemplo 20. *Novamente no Exemplo* 6 *da parte* 1*, se o número de alunos for igual ao número de cadeiras e cada aluno estiver sentado em uma cadeira, então a função que associa cada aluno à cadeira na qual ele está sentado é bijetiva.*

Exemplo 21. *Toda função afim, sendo simultaneamente injetora e sobrejetiva, é bijetora.*

Exemplo 22. *A função de proporcionalidade inversa, $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dada para $x > 0$ por $f(x) = \frac{1}{x}$, é injetora e sobrejetiva, logo, bijetora.*

Exemplo 23. *Se $f : \left[\frac{1}{4}, +\infty\right) \to \left[\frac{39}{8}, +\infty\right)$ é a função dada por $f(x) = 2x^2 - x + 5$, então f é bijetora.*

Exemplo 24. *A função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada para $x > 0$ por $f(x) = x - \frac{1}{x}$, é bijetiva.*

Exemplo 25. *Mostre que a função $f : [1, +\infty) \to [2, +\infty)$ dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$ é bijetiva.*

Prova. Para a injetividade, calculando como no Exemplo 24, chegamos a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow (x_1 - x_2)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 x_2 = 1. \end{aligned}$$

Como $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) = [1, +\infty)$, temos $x_1 x_2 \geq 1 \cdot 1 = 1$, com $x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1, x_2 = 1$; em particular, $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Assim, em qualquer caso, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Para a sobrejetividade, argumentamos como no Exemplo 17: dado $y \geq 2$ precisamos encontrar $x \geq 1$ tal que $f(x) = y$. Mas

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = yx \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0.$$

Essa equação de segundo grau (em x) tem

$$\Delta = (-y)^2 - 4 = y^2 - 4 \geq 0,$$

uma vez que $y \geq 2$. Portanto, ela tem duas raízes reais (possivelmente iguais). Como a soma y e o produto 1 dessas raízes são números positivos, ambas são positivas. Como o produto é 1, não pode acontecer das duas raízes serem menores que 1. Então, pelo menos uma raiz é maior ou igual a 1, logo, pertence ao domínio de f. Por fim, quando x é igual a essa raiz maior ou igual a 1, temos $f(x) = y$. $\square$

Se A e B forem conjuntos *finitos*, é possível mostrar que existe uma função bijetiva $f : A \to B$ se, e só se, A e B tiverem um mesmo número de elementos. O próximo exemplo mostra que, quando A e B forem *infinitos*, pode existir uma função bijetiva $f : A \to B$ mesmo que B seja um subconjunto próprio de A (ou vice-versa).

Exemplo 26. *Seja* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *o conjunto dos números naturais, e* $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ *o conjunto dos números naturais pares. É claro que* $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. *Por outro lado, a função* $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ *dada por* $f(n) = 2n$ *é bijetiva.*

Prova. Realmente, se a e b são números naturais distintos, então os seus dobros também são distintos, ou seja, se $a \neq b$, então $2a \neq 2b$. Logo, a função f é injetiva. Além disso, se n é um númro natural par, então, por definição, $n/2$ é um número natural, de forma que $n = 2 \cdot \frac{n}{2} = f(n/2)$. Logo, f é sobrejetiva. $\square$

Ainda a propósito da demonstração do exemplo anterior, observe que a igualdade $n = 2 \cdot \frac{n}{2}$ sempre é válida; contudo, só pudemos escrever $2 \cdot \frac{n}{2} = f(n/2)$ porque $\frac{n}{2}$ pertence ao domínio de f, isto é, é um número natural.

Terminemos discutindo um exemplo *geométrico*. Para ele, recorde que dois segmentos de reta são chamados *paralelos* se as retas que os contêm forem paralelas.

Exemplo 27. *Sejam AB e CD dois segmentos de reta paralelos. Então, existe uma função bijetiva $f : AB \to CD$ que leva cada ponto do segmento AB em um ponto do segmento CD.*

Prova. Vamos supor, de início, que os segmentos AB e CD não têm um mesmo tamanho. Sendo esse o caso, as semirretas CA e DB intersectam-se no ponto O (veja a figura 3).

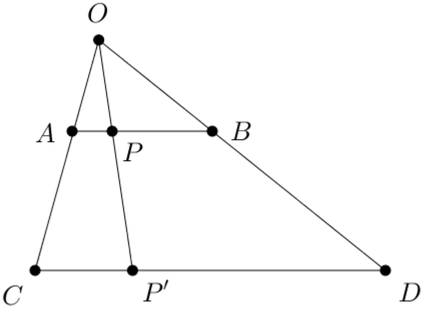

Figura 1: uma função bijetiva de AB em CD.

Considere a semirreta OP, determinada pelo ponto O e por um ponto P do segmento AB. Essa semirreta intersecta o segmento CD em um ponto P' (veja novamente a Figura 3). Considere a função $f : AB \to CD$ que associa cada ponto $P \in AB$ ao ponto $P' \in CD$, obtido como acima.

A função definida acima é injetiva, porque pontos $P, Q \in AB$ distintos determinam semirretas OP e OQ distintas; logo, as interseções de OP e OQ com CD também devem ser distintas, pois se fossem iguais, as duas semirretas teriam dois pontos em comum e, portanto, seriam elas mesmas iguais.

A função f também é sobrejetiva, porque cada ponto $P' \in CD$ determina uma única semirreta OP', que intersecta AB em um ponto P. Pela construção da função, $f(P) = P'$.

No caso em que AB e CD têm um mesmo comprimento e o sentido de A para B coincide com aquele de C para D, a Geometria Euclidiana ensina que as semirretas CA e DB são *paralelas*. Então, definimos a função f do seguinte modo: dado $P \in AB$ seja ℓ a reta que passa por P e é paralela à semirreta CA e, portanto, também é paralela à semirreta DB. Estabeleça a imagem de P por f como sendo o ponto de interseção de ℓ com CD. Os argumentos que usamos acima podem ser repetidos para este caso (convidamos o leitor a fazê-lo), mostrando que a função assim obtida também é bijetiva. $\square$

Observamos que o resultado do exemplo anterior continua válido mesmo quando AB e CD não forem paralelos. Para isso, é necessário reposicionar um dos segmentos de modo que eles passem a ser paralelos, mostrar que esse reposicionamento é uma função bijetiva e considerar a ação simultânea das duas funções. Explicaremos com mais detalhe o que ocorre nesse caso ao estudarmos o conceito de *composição* de funções.

Dicas para o Professor

Dois ou três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir este material.

Os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora são difíceis de assimilar de início, especialmente porque os estudantes tendem a confundir as restrições impostas por cada um deles. Por outro lado, eles são imprescindíveis ao estudo de funções invertíveis, de forma que é bastante importante que os alunos os dominem. Nesse sentido, uma estratégia interessante é discutir mais exemplos em sala, os quais podem ser colhidos das referências a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, Volume 3, terceira edição. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2022.