Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 2 - Volumes e Áreas de Prismas e Pirâmides

Volumes de Sólidos Semelhantes

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Sólidos semelhantes

Fixado um ponto O do espaço e um número real $k > 0$, uma **homotetia** de centro O e razão k é uma transformação que leva um ponto P em um ponto P' de modo que

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}.$$

O número real k é chamado *razão da homotetia*. Os pontos P e P' são chamados **homólogos**.

Duas figuras (isto é, dois conjuntos de pontos) F_1 e F_2 no espaço são chamadas **semelhantes** se existe uma homotetia de razão k que leva a figura F_1 em uma figura F_1', congruente a F_2 (ou seja, F_2 pode ser obtida a partir de F_1' por um *movimento rígido* no espaço). Neste caso, a constante k é chamada **razão de semelhança** entre as figuras.

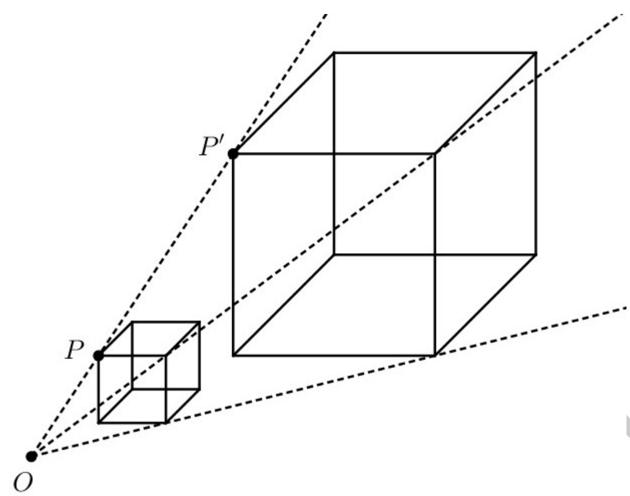

Figura 1: homotetia entre duas figuras no espaço.

Exemplo 1. *Duas esferas, de raios r e R, são semelhantes, com razão de semelhança R/r.*

Solução. De fato, chamemos de $E_r(O)$ e $E_R(O')$ as esferas de raio r e R, centradas em O e O', respectivamente. Consideremos uma esfera $E_R(O)$, de mesmo raio que $E_R(O')$ (e, portanto, congruente a $E_R(O')$), mas concêntrica com $E_r(O)$, ou seja, $E_r(O)$ e $E_R(O)$ têm o mesmo centro O (veja a Figura 2). A esfera $E_R(O)$ pode ser obtida a partir da esfera $E_R(O')$ fazendo-se uma *translação* de $E_R(O')$ pelo vetor $\overrightarrow{O'O}$.

Vista como sólido, uma esfera de centro O raio a pode ser descrita como o conjunto dos pontos do espaço cuja distância até O não supera a, ou seja,

$$E_a(O) = \{P \mid \overline{PO} \leq a\}.$$

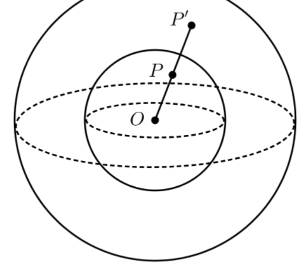

Figura 2: homotetia entre duas esferas concêntricas.

Se $P \in E_r(O)$, então $\overline{PO} \leq r$. Defina P' como o único ponto na semirreta OP tal que $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$, onde $k = \frac{R}{r}$. Da desigualdade $\overline{OP} \leq r$ segue que

$$\overline{OP'} = \frac{R}{r} \cdot \overline{OP} \leq \frac{R}{r} \cdot r = R,$$

e isso implica que P' pertence à esfera $E_R(O)$.

O argumento do parágrafo anterior mostra que existe uma homotetia entre $E_r(O)$ e $E_R(O)$. Como $E_R(O)$ é congruente a $E_R(O')$, concluímos que $E_r(O)$ e $E_R(O')$ são semelhantes.

A *superfície esférica* de centro O e raio a é o conjunto

$$S_a(O) = \{P \mid \overline{PO} = a\}.$$

As duas superfícies esféricas $S_r(O)$ e $S_R(O')$ também são semelhantes. Para constatar isso, bastar repetir o argumento acima com igualdades, em vez de desigualdades. $\square$

Exemplo 2. *Dois cubos de arestas $a < b$ são semelhantes, com razão de semelhança $k = b/a$.*

Solução. É possível construir homotetias entre os cubos diretamente, como na Figura 1. Outra maneira (veja a Figura 3) é considerar, sobre uma aresta AB do cubo maior, um ponto C tal que $\overline{AC} = a$. O cubo com aresta AC é congruente ao cubo menor, de aresta a.

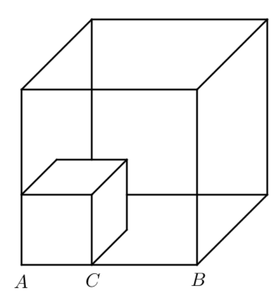

Figura 3: homotetia entre dois cubos.

A homotetia entre o cubo de aresta AC e o cubo de aresta AB pode ser definida do seguinte modo: para cada ponto P do cubo de aresta AC, considere a semirreta $\overrightarrow{AP}$. Nessa semirreta, marque o ponto P' tal que $\overline{AP'} = k \cdot \overline{AP}$, com $k = \frac{b}{a}$. Esse ponto P' é a imagem de P pela homotetia. Por outro lado, o ponto P' é levado no ponto P pela homotetia de centro A e razão $k^{-1} = a/b$. Essas duas homotetias são inversas uma da outra e isso mostra, em particular, que cada uma delas é bijetiva, isto é, a cada ponto P corresponde um único ponto P' e a cada ponto P' corresponde um ponto P. $\square$

2 Volumes de sólidos semelhantes

Nesta seção, discutiremos o seguinte resultado fundamental:

Teorema 3. *Se F e F' são dois sólidos semelhantes, com razão de semelhança k, e se os volumes de F e F' são $v(F)$ e $v(F')$, respectivamente, então* a razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança. *Em símbolos, se $A, B \in F$, $A', B' \in F'$ e $k = \overline{A'B'}/\overline{AB}$, então*

$$\frac{v(F')}{v(F)} = k^3. \tag{1}$$

Prova. Se F e F' são cubos, com arestas a e a', então $v(F) = a^3$ e $v(F') = (a')^3$. A razão de semelhança entre os dois cubos é $k = a'/a$. Logo, neste caso,

$$\frac{v(F')}{v(F)} = \frac{(a')^3}{a^3} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 = k^3.$$

Para outros sólidos a verificação de (1) não é tão simples. A seguir, daremos uma *ideia* de como justificar esse resultado para sólidos mais gerais.

Seja $\delta > 0$ um número real positivo. Imaginemos que o espaço tridimensional foi dividido em cubos justapostos, todos com aresta δ, que formam um *reticulado* ou *malha*. Selecionemos, dentre os cubos dessa malha, aqueles que têm pelo menos um ponto em comum com o sólido F. Alguns desses cubos eventualmente podem estar totalmente contidos em F, e outros podem ter apenas uma parte em comum com o sólido. A quantidade de cubos que encontram o sólido F em pelo menos um ponto é *finita*. Podemos, então, enumerar esses cubos: $C_1, \ldots, C_n$. Cada um deles tem volume igual a δ^3 e o volume da união desses cubos é $n \cdot \delta^3$. Podemos, ainda, considerar apenas os cubos $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ que estão *totalmente contidos* no sólido F. A união desses cubos tem volume $m \cdot \delta^3$.

Essas quantidades n e m de cubos que têm contato com F ou que estão totalmente contidos em F dependem de δ. De fato, quanto menor for δ, tanto maiores serão n e m. De acordo com as escolhas que fizemos para esses cubos, fica claro que

$$m \cdot \delta^3 < v(F) < n \cdot \delta^3. \tag{2}$$

Vamos admitir também que a *fronteira*, ou seja, a "casca" do sólido F é *desprezível do ponto de vista do cálculo de volumes*. De um modo mais preciso, para cada $\delta > 0$, os $n-m$ cubos da malha que têm pontos em comum com F, mas que não estão totalmente contidos em F, são exatamente aqueles que cobrem a fronteira de F. Dizemos que essa fronteira tem **medida nula** se a soma dos volumes dos cubos que cobrem a fronteira puder ficar *tão pequena quanto se queira*. Quantificamos isso da seguinte forma: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $(n - m) \cdot \delta^3 < \varepsilon$.

Agora, a semelhança que transforma F em F' também transforma a malha de cubos com aresta δ em um malha de cubos com aresta $k \cdot \delta$. Vamos admitir os seguintes fatos:

(1) Se um cubo C da malha tem pelo menos um ponto em comum com a figura F, então a imagem C' de C pela semelhança tem pelo menos um ponto em comum com F'. Mais precisamente, se $P \in C \cap F$, então $P' \in C' \cap F'$, onde P' é a imagem de P pela semelhança.

(2) Se um cubo Γ está totalmente contido em F, então sua imagem Γ' pela semelhança é um cubo que está totalmente contido em F'.

As observações acima implicam que

$$m \cdot (k\delta)^3 < v(F') < n \cdot (k\delta)^3. \tag{3}$$

Por outro lado, segue de (3) que o volume da fronteira de F' é menor que $k^3(n-m)\delta^3$. Então, dado $\varepsilon > 0$, escolhendo $\delta > 0$ tal que $(n - m) \cdot \delta^3 < \frac{\varepsilon}{k^3}$, vemos que

$$k^3(n - m)\delta^3 < \varepsilon. \tag{4}$$

Isso significa que a fronteira de F' também tem medida nula.

Multiplicando as desigualdades (2) por k^3, vemos que

$$k^3(m\delta^3) < k^3 \cdot v(F) < k^3 \cdot (n\delta^3). \tag{5}$$

Finalmente, vamos comparar (3) e (5) para concluirmos que $v(F') = k^3 \cdot v(F)$.

Notemos que $v(F')$ e $k^3 \cdot v(F)$ estão ambos em um mesmo intervalo aberto com extremos $mk^3\delta^3$ e $nk^3\delta^3$. Podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que o comprimento desse intervalo, $nk^3\delta^3 - mk^3\delta^3 = k^3(n-m)\delta^3$ seja tão pequeno quanto queiramos. Se fosse $v(F') \neq k^3 \cdot v(F)$, a distância $|v(F') - k^3 \cdot v(F)|$ seria positiva; logo, poderíamos escolher $\varepsilon = |v(F') - k^3 \cdot v(F)|$. Mas, como $v(F')$ e $k^3 \cdot v(F)$ pertencem a um intervalo de comprimento $k^3(n - m)\delta^3$, teríamos

$$\varepsilon = |v(F') - k^3 \cdot v(F)| < k^3(n - m)\delta^3 < \varepsilon,$$

o que é uma contradição. Essa contradição surge por considerarmos $v(F')$ e $k^3 \cdot v(F)$ diferentes. Logo, eles são forçosamente iguais. $\square$

Observação 4. *Um argumento análogo ao apresentado acima pode ser usado para mostrar que a razão entre as áreas $a(F)$ e $a(F')$ de duas figuras planas semelhantes F e F' é igual ao quadrado da razão de semelhança, ou seja,*

$$\frac{a(F')}{a(F)} = k^2. \tag{6}$$

Em particular, se dois poliedros são semelhantes, na razão k, então é imediato que duas faces homólogas dos mesmos também são semelhantes, na mesma razão k. Assim, a razão entre as áreas dessas faces homólogas é igual a k^2.

3 Volume do tronco de pirâmide

Seja α um plano paralelo ao plano da base de uma pirâmide P. A parte da pirâmide P que está situada entre o plano da base e o plano α é chamada **tronco de pirâmide** (veja a Figura 4). A distância entre α e o plano da base é a **altura** do tronco; por outro lado, a base da pirâmide, juntamente com o polígono de interseção da pirâmide com α, são as **bases** do tronco de pirâmide.

Nesta seção explicaremos como calcular o volume de um tronco de pirâmide, uma vez conhecidos sua altura e as áreas de suas bases. Para tanto (veja novamente a Figura 4), consideremos um tronco de pirâmide de altura h e bases com áreas b e B. Suponhamos que este tronco foi obtido a partir de uma pirâmide de base B e altura $h_2 = h + h_1$.

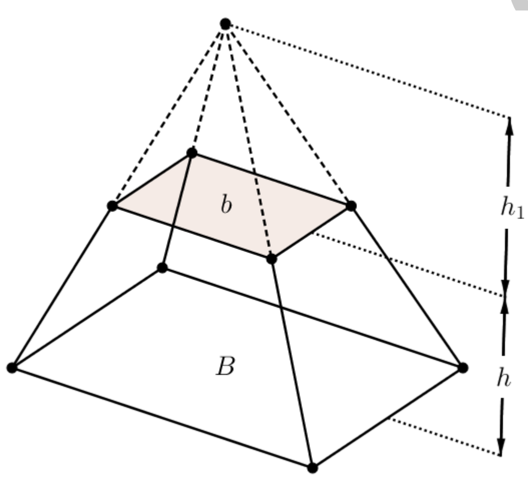

Figura 4: um tronco de pirâmide.

O volume do tronco, V_T é igual à diferença entre os volumes de duas pirâmides semelhantes: $V_T = V_2 - V_1$, onde $V_2 = \frac{1}{3} \cdot h_2 B$ e $V_1 = \frac{1}{3} \cdot h_1 b$. Assim,

$$\begin{aligned} V_T &= V_2 - V_1 = \frac{1}{3} \cdot (h_2 B - h_1 b) \\ &= \frac{1}{3} \cdot ((h_1 + h)B - h_1 b) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (hB + (B - b)h_1). \end{aligned} \tag{7}$$

De acordo com a Observação 4, as bases do tronco são polígonos semelhantes, de razão de semelhança igual à razão de semelhança $k = \frac{h_2}{h_1}$ entre as pirâmides. Também, a razão entre as áreas B e b das bases é igual a k^2, de sorte que

$$\begin{aligned} &\frac{B}{b} = k^2 = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = \frac{h_1 + h}{h_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = 1 + \frac{h}{h_1} \Rightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow h_1 = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \cdot h. \end{aligned}$$

Substituindo essa relação na última expressão em (7), obtemos

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \left(hB + (B - b)\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \cdot h \right).$$

Podemos simplificar a última expressão acima notando que $\frac{B-b}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} = \sqrt{B} + \sqrt{b}$. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{h}{3} \cdot \left(B + (\sqrt{B} + \sqrt{b})\sqrt{b} \right) \\ &= \frac{h}{3} \cdot \left(B + \sqrt{Bb} + b \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Exemplo 5. *Num tronco de pirâmide triangular regular, a aresta da base maior mede ℓ e a aresta da base menor mede m. A aresta lateral mede n. Calcule o volume desse tronco.*

Solução. As bases do tronco são triângulos equiláteros com áreas $B = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ e $b = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$. Na expressão (8), já podemos calcular $B + \sqrt{Bb} + b$:

$$\sqrt{Bb} = \sqrt{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{m^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\ell m\sqrt{3}}{4}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} B + \sqrt{Bb} + b &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\ell m\sqrt{3}}{4} + \frac{m^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\ell^2 + \ell m + m^2\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Para calcularmos o volume do tronco, resta encontrar sua altura h. Para tanto, examinemos a Figura 5, que mostra o tronco de pirâmide, juntamente com a projeção ortogonal da base menor do tronco sobre a base maior.

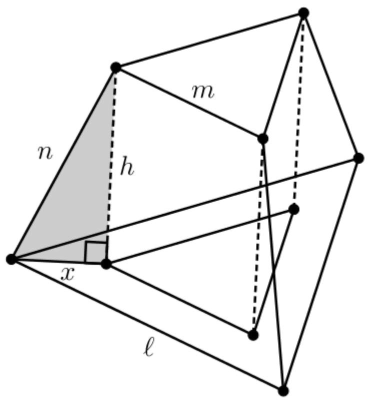

Figura 5: a altura do tronco é $h = \sqrt{n^2 - x^2}$.

Observe que h aparece como um dos catetos do triângulo retângulo cinza, cuja hipotenusa tem medida n. Denotando por x o outro cateto, podemos calcular h em termos de n e x com o auxílio do Teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{n^2 - x^2}. \tag{10}$$

Resta, então, encontrarmos x como função dos dados ℓ, m e n. Para tanto (Figura 6), note que a projeção ortogonal da base menor sobre a base maior é um triângulo equilátero de lados de medida m, paralelos aos lados da base maior. Ademais, uma vez que a pirâmide é regular, o centro da projeção coincide com o centro da base maior.

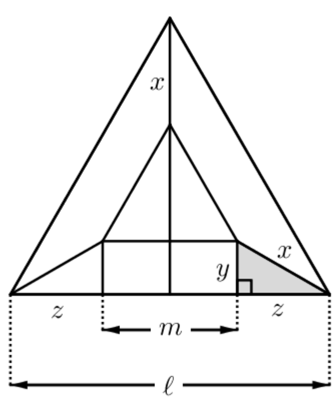

Figura 6: a projeção da base menor sobre a base maior do tronco.

Então, nas notações da Figura 6, temos que $2z = \ell - m$, ou seja, $z = \frac{\ell - m}{2}$. A diferença entre as alturas dos dois triângulos é igual a $x + y$, isto é,

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} - \frac{m\sqrt{3}}{2} = x + y.$$

Portanto,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(\ell - m) - x.$$

Agora, o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo em destaque na Figura 6, fornece $x^2 = y^2 + z^2$, logo,

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\ell - m) - x\right)^2 + \left(\frac{\ell - m}{2}\right)^2.$$

A igualdade acima pode ser simplificada para

$$\sqrt{3}(\ell - m)x = (\ell - m)^2$$

e, finalmente,

$$x = \frac{\ell - m}{\sqrt{3}}.$$

Por fim, substituindo essa última relação em (10), chegamos a

$$h = \sqrt{n^2 - \frac{(\ell - m)^2}{3}} \tag{11}$$

Então, segue de (8), (9) e (11) que o volume do tronco de pirâmide é calculado, em função das medidas dadas, por:

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{3}\sqrt{n^2 - \frac{(\ell - m)^2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\ell^2 + \ell m + m^2\right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \sqrt{3n^2 - (\ell - m)^2} \cdot (\ell^2 + \ell m + m^2). \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

A presente aula pode ser coberta em três ou quatro encontros de 50 minutos.

Mais uma vez usamos o Princípio da Exaustão para demonstrar uma proposição envolvendo volumes (Teorema 3). Num primeiro momento, dependendo da maturidade da sua turma, você pode evitar os detalhes técnicos da Seção 2, restringindo o argumento à parte mais intuitiva, de que "pequenos cubinhos" podem fornecer boas aproximações para o volume de um sólido. Num segundo momento, você pode avaliar com seus alunos qual é a diferença entre *existir uma boa aproximação* e *existir uma aproximação tão boa quanto se queira*. Outro aspecto importante é a exigência de que a fronteira do sólido tenha *medida nula*, muito embora uma apreciação adequada da relevância desse fato ao cálculo de volumes fuja ao escopo destas notas. Você pode, ainda, explorar o caso bidimensional, em que a razão entre as *áreas* de figuras semelhantes é igual ao *quadrado* da razão de semelhança, conforme exposto na Observação 4.

O cálculo do volume do tronco de pirâmide, assim como a solução do Exemplo 5, envolve algumas técnicas algébricas simples e pode ser usado também como ilustração de aplicação dessas técnicas.

Você pode também consultar as sugestões de leitura complementar [1] e [2], para ver mais exemplos relacionados ao material discutido aqui.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha, *Geometria*, Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2014.
2. O. Dolce, J.N. Pompeo, *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 10, quarta edição, São Paulo, Ed. Atual, 1985.