Material Teórico - Módulo de Função Logarítmica

Função logarítmica e propriedades - Parte 2

Primeiro Ano - Ensino Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Nesta segunda parte, estudaremos as funções associadas à noção de logaritmo everemos que essas funções são inversas de funções exponenciais. Também estudaremos os gráficos dessas funções.

1 Funções logarítmicas como inversas de funções exponenciais

Vamos denotar por $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais positivos. Fixado um número real positivo $a > 0$, diferente de 1, função $L_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dada por $L_a(x) = \log_a x$, é chamada *função logarítmica de base a*.

Se $a > 1$, a função L_a é crescente. De fato, suponha que x_1 e x_2 sejam números reais positivos, e sejam $y_1 = \log_a x_1$ e $y_2 = \log_a x_2$. Suponha, ainda, que $x_1 < x_2$. A definição de logaritmo nos diz que $x_1 = a^{y_1}$ e $x_2 = a^{y_2}$. Como $a > 1$, a função exponencial de base a é crescente, logo, se ocorresse $y_1 \geq y_2$, teríamos $a^{y_1} \geq a^{y_2}$, o que não é o caso. Assim, deve ser $y_1 < y_2$, ou seja, $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Se $0 < a < 1$, então a função L_a é decrescente. De fato, se $b = a^{-1}$, então $b > 1$, de sorte que a função L_b, dada por $L_b(x) = \log_b x$, é crescente, pelo que vimos no parágrafo anterior. Por outro lado, aplicando a fórmula do Exemplo 4, da Parte 1, com $k = -1$, obtemos

$$L_a(x) = \log_a x = \log_{b^{-1}} x = (-1) \log_b x = -L_b(x).$$

Assim, como L_b é crescente, a função L_a é decrescente.

Mostremos, agora, o seguinte fato importante.

> A função exponencial $E_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é bijetiva e a função L_a é sua inversa.

Na aula sobre funções exponenciais, vimos que a função exponencial E_a é injetiva e que sua imagem é o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ dos números reais positivos. Isso implica que $E_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é bijetiva. Evidentemente, se mostrarmos que E_a tem uma inversa, isso será outra forma de mostrar que essa função é bijetiva. Fazemos isto a seguir.

Pela definição de logaritmo (veja a Propriedade (3), na Parte 1 desta aula), temos

$$E_a(L_a(x)) = E_a(\log_a x) = a^{\log_a x} = x.$$

Por outro lado, segue das propriedades (2) e (6) que

$$L_a(E_a(x)) = \log_a(a^x) = x \log_a a = x.$$

Isso mostra que as composições $E_a \circ L_a$ e $L_a \circ E_a$ são as funções identidade de $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$, respectivamente. Assim, E_a e L_a são inversas uma da outra.

Observação 1. *Evidentemente, o fato de E_a e L_a serem inversas uma da outra também implica que L_a é uma função bijetiva. Disso segue, em particular, que as tábuas de logaritmos podiam ser usadas sem ambiguidade, pois a injetividade da função logarítmica garante que, uma vez conhecido o logaritmo de um número real positivo, podemos determinar univocamente esse número.*

Outra aplicação da bijetividade da função logarítmica é à resolução de certas equações ou inequações exponenciais.

Exemplo 2. *Encontre as possíveis soluções da equação*

$$3^x - 3^{-x} = 1.$$

Solução. Chamando $y = 3^x$, temos que $3^{-x} = \frac{1}{y}$, logo, a equação dada corresponde a $y - \frac{1}{y} = 1$, ou seja, $y^2 - y - 1 = 0$. Resolvendo essa equação quadrática, obtemos $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Como $1 < \sqrt{5}$, a solução $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é negativa, logo, não pode ser igual a uma potência de 3. Assim, a única solução conveniente é $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que fornece $3^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ou seja, $x = \log_3 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. □

Exemplo 3. *Resolva a inequação*

$$2^{3x} - 11 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+3} > 0.$$

Solução. A inequação dada pode ser reescrita como

$$(2^x)^3 - 11 \cdot (2^x)^2 + 24 \cdot 2^x > 0.$$

Fazendo $y = 2^x$, obtemos

$$y^3 - 11y^2 + 24y > 0,$$

que é equivalente a

$$y(y-3)(y-8) > 0.$$

Vamos analisar o sinal da expressão $y(y-3)(y-8)$:

1. Se $y < 0$, então os três fatores, y, $y-3$ e $y-8$, são negativos, logo, o produto $y(y-3)(y-8)$ também é negativo e este caso não nos interessa.

2. Se $0 < y < 3$, então $y > 0$, $y - 3 < 0$ e $y - 8 < 0$. Neste caso, o produto $y(y-3)(y-8)$ é positivo.

3. Se $3 < y < 8$, então $y > 0$, $y - 3 > 0$ e $y - 8 < 0$. Neste caso, $y(y-3)(y-8) < 0$ e não há solução.

4. Se $y > 8$, então os três fatores são positivos, logo, o produto também o é.

Assim, $y(y-3)(y-8) > 0$ se, e somente se, $0 < y < 3$ ou $y > 8$. Como $y = 2^x$, os valores de x que nos interessam são aqueles tais que $0 < 2^x < 3$ ou $2^x > 8$. A desigualdade $2^x > 0$ é sempre válida. De $2^x < 3$ segue que $x < \log_2 3$. De $2^x > 8$ segue que $x > \log_2 8 = \log_2(2^3) = 3$. Portanto, o conjunto solução da inequação dada é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_2 3 \text{ ou } x > 3\}$. □

2 Gráfico da função inversa

Considere os conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ e a função $f : A \to B$. Suponha que a função f seja bijetiva, portanto tenha uma inversa $f^{-1} : B \to A$. Nesta seção, responderemos a seguinte pergunta: *dado o gráfico de f, como obter o gráfico de f^{-1}?*

O gráfico da função $f : A \to B$ é o subconjunto $\mathrm{Gr}(f)$ de $A \times B$ dado por

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}.$$

Agora, $y = f(x)$ é equivalente a $f^{-1}(y) = x$. Isso significa que

$$\begin{aligned} &(x, y) \in \mathrm{Gr}(f) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathrm{Gr}(f^{-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

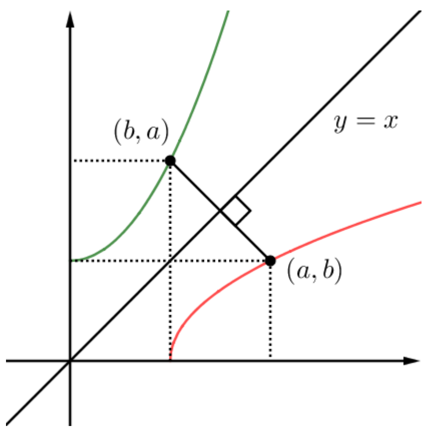

Figura 1: os pontos (a, b), pertencente ao gráfico de f, e (b, a), pertencente ao gráfico da inversa f^{-1}, são simétricos em relação à reta $y = x$.

A seguir, estudamos o significado geométrico de (1).

Dizemos que os pontos P e Q são **simétricos** em relação à reta ℓ se essa reta é a mediatriz do segmento de reta PQ, ou seja, se a reta ℓ é perpendicular à reta que passa por P e Q e intersecta o segmento PQ em seu ponto médio.

Na Figura 1, o ponto $M = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}\right)$ é o ponto médio do segmento cujas extremidades são os pontos (a, b) e (b, a). Como a abscissa e a ordenada do ponto M são iguais, esse ponto pertence à reta $y = x$.

Além disso, a reta que passa por (a, b) e (b, a) tem coeficiente angular $m_1 = \frac{b-a}{a-b} = -1$, e a reta $y - x$ tem coeficiente angular $m_2 = 1$. Como $m_1 \cdot m_2 = -1$, essas duas retas são perpendiculares.

Portanto, a reta $y = x$ é a mediatriz do segmento de extremidades (a, b) e (b, a), e concluímos o seguinte:

Os pontos (a, b) e (b, a) são simétricos em relação à reta $y = x$.

A discussão acima nos permite concluir que o gráfico da função inversa f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta $y = x$, ou seja, $\mathrm{Gr}(f^{-1})$ é a imagem de $\mathrm{Gr}(f)$ pela reflexão em relação à reta $y = x$.

3 Gráficos de funções logarítmicas

Seja $a > 1$ um número real dado. Na Figura 2 vemos o gráfico da função exponencial $E_a(x) = a^x$ em verde e da função logarítmica $L_a(x) = \log_a x$ em vermelho (de fato, modificando o real $a > 1$, modificaremos correspondentemente os gráficos de E_a e L_a. Assim, a Figura 2 deve ser vista como uma representação *típica* de tais gráficos).

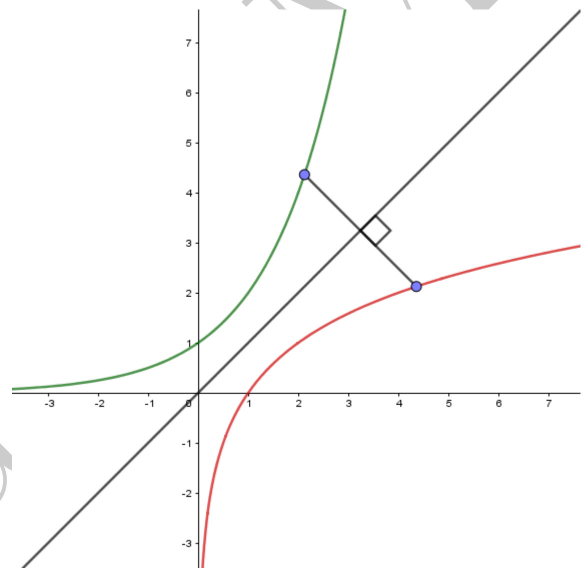

Figura 2: os gráficos da função exponencial $x \mapsto a^x$ (em verde) e de sua inversa, $x \mapsto \log_a x$ (em vermelho).

Uma vez que são gráficos de funções inversas, eles são curvas simétricas em relação à reta $y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares. Isso significa que, para cada ponto do gráfico da função exponencial, existe um ponto sobre o gráfico da função logarítmica tal que o segmento de reta com extremidades nesses dois pontos é perpendicular à reta $y = x$, intersectando tal reta em seu ponto médio.

Em particular, à medida que x se aproxima de 0 por valores positivos, o gráfico da função logarítmica se aproxima mais e mais do eixo y; mais precisamente, dado um número real $N < 0$, existe $x > 0$ suficientemente próximo de zero, tal que $\log_a x < N$. Por outro lado, dado $M > 0$, existe $x > 0$, suficientemente grande tal que $\log_a x > M$; de outra forma, podemos tornar $\log_a x$ tão grande quanto desejado, bastando tomar um real positivo x suficientemente grande.

No caso em que $0 < a < 1$, os gráficos da função exponencial $E_a(x) = a^x$ e da função logarítmica $L_a(x) = \log_a x$

também são simétricos em relação à reta $y = x$, uma vez que tais funções continuam sendo inversas uma da outra. Tais gráficos são como os mostrados na Figura 3 (novamente aqui, modificando o real $0 < a < 1$, modificaremos correspondentemente os gráficos de E_a e L_a. Assim, a Figura 3 também deve ser vista como uma representação *típica* de tais gráficos).

A diferença entre os gráficos esboçados nas duas figuras pode ser explicada facilmente, a partir da fórmula deduzida no Exemplo 4 da parte 1 desta aula: se $\alpha > 1$, então $0 < \alpha^{-1} < 1$ e

$$L_{\alpha^{-1}}(x) = \log_{\alpha^{-1}} x = -\log_\alpha x = -L_\alpha(x)$$

ou, resumidamente,

$$L_{\alpha^{-1}} = -L_\alpha.$$

Assim, os gráficos das funções L_α e $L_{\alpha^{-1}}$ são simétricos em relação ao eixo y.

A análise que fizemos da relação entre os gráficos da função exponencial e logarítmica, no caso $a > 1$, pode ser repetida no caso em que $0 < a < 1$. Nesse caso, as conclusões sobre o comportamento da função logarítmica $x \mapsto \log_a x$ quando x se aproxima de zero (por valores positivos) ou quando x fica arbitrariamente grande são as seguintes: dado $M > 0$, existe $x > 0$ suficientemente pequeno, tal que $\log_a x > M$; dado $N < 0$, existe x suficientemente grande tal que $\log_a x < N$. Para compreender o significado dessas afirmações, basta usar que $a^{-1} > 1$ e que (conforme observamos acima) os gráficos de L_a e $L_{a^{-1}}$ são simétricos em relação ao eixo y.

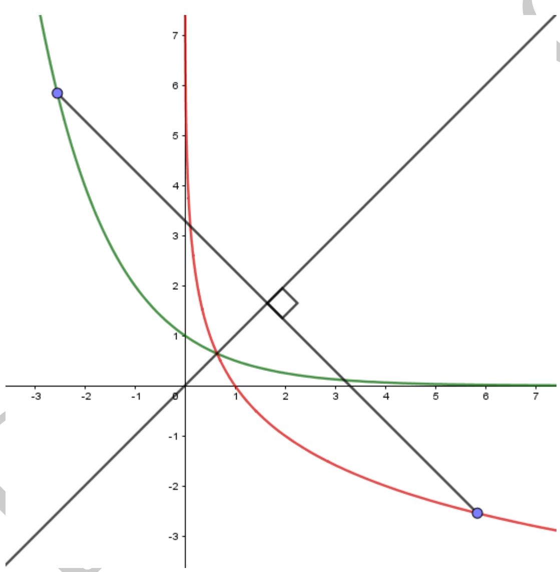

Figura 3: os gráficos da função exponencial $x \mapsto a^x$ (verde) e de sua inversa $x \mapsto \log_a x$ (vermelho), no caso em que $0 < a < 1$.

Dicas para o Professor

A presente aula pode ser coberta em dois encontros de 50 minutos.

Nesta segunda parte, apresentamos a função logarítmica e vemos que, de acordo com a definição de logaritmo vista na parte 1, funções logarítmicas são inversas de funções exponenciais.

Na parte 3, veremos que é possível definir primeiramente as funções logarítmicas e, depois, as funções exponenciais como suas inversas.

O estudo do gráfico da inversa de uma função bijetiva dada pode servir como motivador para o estudo de transformações no plano, em particular, para o estudo das reflexões em torno de retas que passam pela origem. A reflexão em torno da reta $y = x$ é uma função $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $F_1(x, y) = (y, x)$. Isso significa que os pontos (x, y) e $F_1(x, y) = (y, x)$ são simétricos em relação à reta $y = x$.

A função $F_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto (x, y) do plano o seu simétrico $F_m(x, y)$ em relação à reta $y = mx$, que passa pela origem e tem coeficiente angular m, é dada por

$$F_m(x, y) = \left(\frac{(1 - m^2)x + 2my}{1 + m^2}, \frac{2mx - (1 - m^2)y}{1 + m^2} \right).$$

Convidamos você e seus estudantes a testar essa fórmula para alguns valores de m e a tentar entender porque ela é válida.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matematica Elementar*, vol. 3, segunda edição. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. G. Iezzi, O. Dolce, C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 2, quarta edição. São Paulo, Ed. Atual, 1985.
3. E. L. Lima. *Logaritmos*. SBM, Rio de Janeiro, 1991.