

Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1

Ângulos - Parte 2

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha



1 Submúltiplos do grau

Na aula anterior, apresentamos o grau como unidade de medida para ângulos, definindo que um ângulo de 1° corresponde a um arco cuja medida é $\frac{1}{360}$ do comprimento de um círculo. Pela necessidade de medir ângulos cujas medidas não sejam múltiplos inteiros do grau, introduzimos a seguir ângulos cujas medidas são submúltiplos do grau.

Um ângulo de **1 minuto** é um ângulo cuja medida é $\frac{1}{60}$ da medida de um ângulo de 1° . Escrevemos

$$1' = \frac{1}{60} \times 1^\circ$$

ou, ainda,

$$1^\circ = 60'$$

Temos, então, a seguinte regra:

Se quisermos transformar a medida de um ângulo, que é dada em minutos, para graus, devemos dividir a quantidade de minutos por 60; o quociente dessa divisão será a quantidade de graus correspondentes. Se quisermos fazer a transformação inversa, ou seja, de graus para minutos, devemos multiplicar a quantidade de graus por 60; o produto dessa multiplicação será a quantidade de minutos correspondentes.

Dizemos que um ângulo mede **1 segundo** se sua medida é $\frac{1}{60}$ da medida de um ângulo de $1'$. Neste caso, escrevemos

$$1'' = \frac{1}{60} \times 1' = \frac{1}{3600} \times 1^\circ$$

ou, ainda,

$$1' = 60'' \text{ e } 1^\circ = 3600''.$$

Temos, então, a regra geral a seguir:

Se quisermos transformar a medida de um ângulo, que é dada em segundos, para minutos (resp. graus), devemos dividir a quantidade de segundos por 60 (resp. 3600). Por outro lado, para transformar a medida de um ângulo dada em minutos (resp. graus) para segundos, multiplicamos a quantidade de minutos (resp. graus) por 60 (resp. 3600).

Observação 1. Existem outras unidades de medida de ângulos utilizadas com certa frequência, como o **grado** (abreviamos gr), que vale $\frac{1}{100}$ de um ângulo reto, e o **radiano** (abreviamos rad), que corresponde, em um círculo, a um arco cuja medida é igual à do raio.

Na figura 1 temos que $\widehat{AOB} = 90^\circ = 100 \text{ gr}$ e, na figura 1, temos

$$\widehat{AOB} = 1 \text{ rad} \cong 57,296^\circ.$$

Observe que, na figura 1, o ponto A é obtido quando enrolamos o segmento vertical vermelho ao longo do círculo,

de forma que (conforme lá indicado) o comprimento do arco \widehat{AB} em vermelho seja exatamente igual ao raio r do círculo.

Conforme veremos em aulas posteriores, a medição de ângulos em radianos é particularmente útil no estudo da Trigonometria, assunto que, dentre outras, tem várias aplicações interessantes e importantes à Geometria Plana.

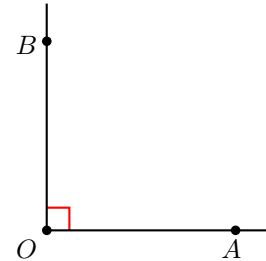


Figura 1: um ângulo de 100 gr.

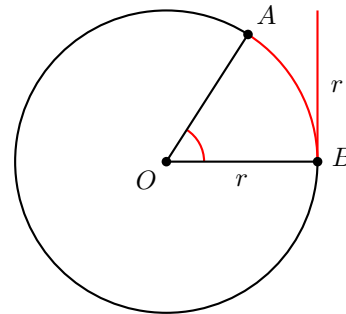


Figura 2: um ângulo de 1 rad.

A seguir, colecionamos alguns exemplos, no sentido de exercitar as operações de conversões de ângulos.

Exemplo 2. Simplificando a medida $28^\circ 150' 925''$, obtemos:

- (a) $29^\circ 55' 15''$.
- (b) $31^\circ 55' 25''$.
- (c) $31^\circ 45' 25''$.
- (d) $30^\circ 45' 25''$.
- (e) $30^\circ 25' 45''$.

Solução. Primeiramente, observe que, para transformar $925''$ em minutos, devemos dividir 925 por 60, pois $1' = 60''$. obtemos, assim:

$$925'' = 15 \times 60'' + 25'' = 15' 25''.$$

Daí, segue que

$$28^{\circ}150'925'' = 28^{\circ}(150 + 15)'25'' = 28^{\circ}165'25''.$$

Agora, para transformar 165' em graus, dividimos novamente por 60, pois $1^{\circ} = 60'$. Então, temos:

$$165' = 2 \times 60' + 45' = 2^{\circ}45',$$

de forma que

$$\begin{aligned} 28^{\circ}150'925'' &= 28^{\circ}165'25'' = (28 + 2)^{\circ}45'25'' \\ &= 30^{\circ}45'25''. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é o item (d). \square

Exemplo 3. *Escrevendo a medida $86,12^{\circ}$ utilizando os submúltiplos do grau, obtemos:*

(a) $86^{\circ}7'12''$.

(b) $86^{\circ}6'52''$.

(c) $86^{\circ}8'42''$.

(d) $86^{\circ}5'12''$.

(e) $86^{\circ}7'22''$.

Solução. Começamos observando que $86,12^{\circ} = 86^{\circ} + 0,12^{\circ}$. Agora, como $1^{\circ} = 3600''$, temos

$$0,12^{\circ} = 0,12 \times 3600'' = 432''.$$

Dividindo 432'' por 60, obtemos

$$432'' = 7 \times 60'' + 12'' = 7'12'',$$

e concluímos que $86,12^{\circ} = 86^{\circ}7'12''$. \square

Exemplo 4. *Calcule o valor da soma*

$$34^{\circ}245'290'' + 57^{\circ}387'743'',$$

simplificando o resultado.

Solução. O primeiro passo é somar as medidas em graus, minutos e segundos. Então, como $34^{\circ} + 57^{\circ} = 91^{\circ}$, $245' + 387' = 632'$ e $290'' + 743'' = 1033''$, obtemos:

$$34^{\circ}245'290'' + 57^{\circ}387'743'' = 91^{\circ}632'1033''.$$

O próximo passo é simplificar a medida $91^{\circ}632'1033''$. Para isso, começamos notando que

$$1033'' = 17 \times 60'' + 13'' = 17'13''.$$

Daí,

$$632'1033'' = 649'13''.$$

Agora observe que

$$649' = 10 \times 60' + 49' = 10^{\circ}49'.$$

Logo, obtemos:

$$91^{\circ}632'1033'' = 91^{\circ}649'13'' = 101^{\circ}49'13'',$$

e, portanto,

$$34^{\circ}245'290'' + 57^{\circ}387'743'' = 101^{\circ}49'13''.$$

\square

Exemplo 5. *Calcule a medida de um ângulo α que corresponde a $\frac{1}{8}$ da medida de um ângulo reto.*

Solução. Sabemos que um ângulo reto mede 90° . Assim,

$$\alpha = \frac{1}{8} \times 90^{\circ} = 11,25^{\circ}.$$

Mas, como

$$0,25^{\circ} = 0,25 \times 60' = 15',$$

temos

$$\alpha = 11,25^{\circ} = 11^{\circ} + 0,25^{\circ} = 11^{\circ}15'.$$

\square

Exemplo 6. *Explique, com justificativa, se um ângulo $\alpha = 256989''$ é agudo, reto ou obtuso.*

Solução. Sabemos que $1^{\circ} = 60' = 3600''$. Daí, dividindo 256989 por 3600, obtemos:

$$256989'' = 71 \times 3600'' + 1389''.$$

Então, obviamente, temos

$$71^{\circ} < \alpha < 72^{\circ},$$

de sorte que α é um ângulo agudo.

Se quisermos determinar o valor de α em graus, minutos e segundos, devemos transformar 1389'' em minutos. Para tanto, dividindo 1389 por 60, obtemos

$$1389'' = 23 \times 60'' + 9'' = 23'9'',$$

e segue que

$$\alpha = 256989'' = 71^{\circ}23'9''.$$

\square

Exemplo 7. *Multiplicando a medida do ângulo $\alpha = 23^{\circ}46'19''$ por cinco, obtém-se:*

(a) $117^{\circ}52'25''$.

(b) $118^{\circ}51'35''$.

(c) $119^{\circ}52'35''$.

(d) $118^{\circ}51'25''$.

(e) $117^{\circ}51'35''$.

Solução. Multiplicando as medidas de graus, minutos e segundos diretamente por 5, obtemos:

$$5\alpha = 115^{\circ}230'95''.$$

Agora,

$$95'' = 1 \times 60'' + 35'' = 1'35'',$$

de modo que

$$5\alpha = 115^{\circ}230'95'' = 115^{\circ}231'35''.$$

Por outro lado,

$$231' = 3 \times 60' + 51' = 3^{\circ}51',$$

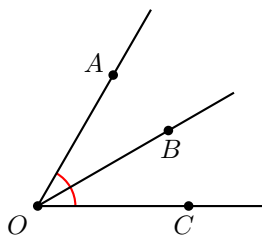
e obtemos

$$5\alpha = 115^{\circ}231'35'' = 118^{\circ}51'35''.$$

Assim, a alternativa correta é o item (e). \square

Exemplo 8. Na figura abaixo, temos $\widehat{AOC} = 5x - 16^{\circ}$ e $\widehat{BOC} = x + 15^{\circ}$. Se \overrightarrow{OB} é a bissetriz do ângulo $\angle AOC$, qual é o valor de x ?

- (a) $x = 15^{\circ}30'$.
- (b) $x = 15^{\circ}33'$.
- (c) $x = 16^{\circ}20'$.
- (d) $x = 16^{\circ}40'$.
- (e) $x = 15^{\circ}20'$.



Solução. Como \overrightarrow{OB} é a bissetriz de $\angle AOC$, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{AOC} = 2\widehat{BOC} &\implies 5x - 16^{\circ} = 2(x + 15^{\circ}) \\ &\implies 5x - 16^{\circ} = 2x + 30^{\circ} \\ &\implies 3x = 46^{\circ} \\ &\implies x = \frac{1}{3} \times 46^{\circ}. \end{aligned}$$

Mas, como $46^{\circ} = 45^{\circ}60'$, concluímos que

$$x = 45^{\circ}60' \div 3 \implies x = 15^{\circ}20'.$$

\square

Exemplo 9. Qual é o complementar do ângulo $\alpha = 38^{\circ}25'13''$?

- (a) $61^{\circ}34'47''$.
- (b) $61^{\circ}35'13''$.
- (c) $62^{\circ}35'47''$.
- (d) $62^{\circ}34'13''$.
- (e) $62^{\circ}34'47''$.

Solução. O complementar de α é o ângulo β que satisfaz

$$\alpha + \beta = 90^{\circ},$$

ou seja,

$$\beta = 90^{\circ} - \alpha = 90^{\circ} - 38^{\circ}25'13''.$$

Para efetuar esse cálculo, escrevemos

$$90^{\circ} = 89^{\circ}60' = 89^{\circ}59'60'',$$

de modo que

$$\beta = 89^{\circ}59'60'' - 38^{\circ}25'13'' = 61^{\circ}34'47''.$$

Portanto, a alternativa correta é o item (a). \square

Exemplo 10. Ao subtrairmos 35° do triplo do complementar de um ângulo, obtemos o próprio ângulo. A medida desse ângulo é, então, de:

- (a) $57^{\circ}30'$.
- (b) $57^{\circ}45'$.
- (c) $57^{\circ}15'$.
- (d) $58^{\circ}45'$.
- (e) $58^{\circ}15'$.

Solução. Denotando o ângulo em questão por α , temos que

$$\begin{aligned} 3(90^{\circ} - \alpha) - 35^{\circ} &= \alpha \implies 270^{\circ} - 3\alpha - 35^{\circ} = \alpha \\ &\implies 4\alpha = 235^{\circ} \\ &\implies \alpha = \frac{1}{4} \times 235^{\circ} = 58,75^{\circ}. \end{aligned}$$

Agora, observe que $0,75^{\circ} = 0,75 \cdot 60' = 45'$. Portanto,

$$\alpha = 58^{\circ}45',$$

e a alternativa correta é o item (d). \square

Ângulos e Coordenadas Geográficas

Historicamente, a necessidade da medição de ângulos utilizando minutos e segundos deveu-se à sua utilização, séculos atrás, em **cartas de navegação**, como o propósito de os navegadores marcarem suas posições nos oceanos da Terra o mais acuradamente possível.

Recordamos que navegadores e exploradores localizavam-se sobre a superfície da Terra utilizando as **coordenadas geográficas**, comumente denominadas **Latitude** e **Longitude**. Na figura¹ 3, à esquerda, vemos marcados os 180 *paralelos de Latitude*, variando de -90° a $+90^\circ$, sendo que o paralelo de 0° corresponde à **linha do Equador**. Observe que cada paralelo de Latitude corresponde, sobre a superfície da Terra, a um círculo paralelo ao círculo que representa a linha do Equador. Na figura 3, à direita, vemos marcados os 360 *meridianos de Longitude*, variando de -180° a $+180^\circ$, sendo que o meridiano de 0° corresponde ao *meridiano de Greenwich* (que é simplesmente o meridiano que contém uma linha específica, marcada nos arredores do Observatório Real de Greenwich, em Londres). Cada meridiano de Longitude corresponde, sobre a superfície da Terra, a um semicírculo tendo suas extremidades nos polos Norte e Sul.

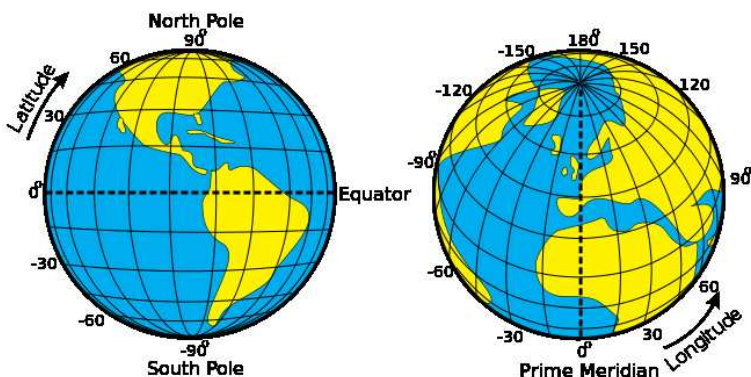


Figura 3: medindo Latitude e Longitude.

Assim, alguém cujas coordenadas geográficas são 15° de *Latitude Sul* e 47° de *Longitude Oeste*, pode marcar sua posição em um globo terrestre como igual à interseção do paralelo -15° com o meridiano de -47° , e estará situado em algum ponto do Distrito Federal.

É, agora, fácil entender porque os precursores da exploração de nosso planeta sentiram a necessidade de utilizar minutos e segundos na medição de ângulos. Para tanto, começemos observando que a circunferência da Terra mede aproximadamente 40030km. Portanto, se um navio, situado sobre a linha do Equador, se desloca de 1° no sentido Oeste-Leste ou no sentido Sul-Norte, ele se desloca cerca de

111km. Por outro lado, se o navio se desloca $1''$ no sentido Oeste-Leste ou no sentido Sul-Norte, ele se desloca cerca de 30m. De outra forma, um erro de $0,5^\circ$ nas coordenadas geográficas desse navio implicará num erro de cerca de 111km em sua localização, ao passo que um erro de $0,5''$ implicará num erro de cerca de 30m em sua localização!

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para discutir a teoria e resolver os exercícios que compõem esse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.

¹By Djexplo (own work), via Wikimedia Commons.