

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Leis do Limite - Parte 2

Limites Laterais

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Dezembro de 2022



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Apresentaremos, nesta aula, vários exercícios a respeito de limites laterais (incluindo limites no infinito). Na segunda seção, após enunciarmos um teorema fundamental sobre a existência de limites laterais, definiremos a função exponencial e estudaremos suas principais propriedades.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida pela regra $f(x) = \frac{|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 5x + 6|}{2x - 4}$. Determine os limites laterais de f no ponto 2.*

Solução. Vejamos que $f(x) = -1$, para cada $x \in (1, 2)$, enquanto que $f(x) = 1$, para todo $x \in (2, 3)$. De fato, como $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ e $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, vale, para cada $x \in (1, 3) \setminus \{2\}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(|x - 1| + |x - 3|)|x - 2|}{2(x - 2)} \\ &= \frac{(x - 1) - (x - 3)}{2} \cdot \frac{|x - 2|}{x - 2} \\ &= \frac{|x - 2|}{x - 2}. \end{aligned}$$

Logo, $1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = -1$, ao passo que $2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = 1$. Daí, as igualdades $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f(x) = \pm 1$ seguem imediatamente. \square

Para o próximo exemplo, confira as convenções estabelecidas após a proposição 5 da primeira aula desse módulo.

Exemplo 2. *Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{x-1}}$.*

Solução. Primeiramente, como $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$ e $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1 = -(\sqrt{1-x})^2$ (uma vez que estamos interessados em valores de x menores que 1), um pouco de álgebra elementar dá

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{x}-1} &= \frac{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x+x^2}(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\
 &= \frac{-\sqrt{1+x+x^2}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{1-x}}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sqrt{1+x+x^2}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{1-x}} \\
 &= \frac{-\sqrt{3} \cdot 2}{0^+} = -\infty.
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. Encontre o valor do limite abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right).$$

Solução. Observando que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\cancel{x} + \sqrt{x}) - \cancel{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1},
 \end{aligned}$$

segue da igualdade $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

A seguir, é conveniente lembrar-se de que $[x]$ denota a *parte inteira* do número real x (veja o primeiro exemplo da aula anterior).

Exemplo 4. *Sejam a e b números reais positivos. Prove que:*

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = 0.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = +\infty.$$

Solução. Para o item (i), observe que $0 < x < a$ implica $0 < \frac{x}{a} < 1$, de forma que $\left[\frac{x}{a} \right] = 0$. Assim, $\frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = 0$, para cada x pertencente ao intervalo $(0, a)$, de onde segue a igualdade $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = 0$.

Quanto ao item (ii), se $-a < x < 0$, então $-1 < \frac{x}{a} < 0$. Portanto, $\left[\frac{x}{a} \right] = -1$ e, daí,

$$\frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = -\frac{b}{x}, \quad (1)$$

para todo $x \in (-a, 0)$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{b}{x} = \frac{b}{0^-} = -\infty$, segue de (1) que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = +\infty$. □

Exemplo 5. *Calcule $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{\sin t})}{\sin(\sqrt{1 - \cos t})}$.*

Solução. Vamos lembrar do limite trigonométrico fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2)$$

Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad (3)$$

pois $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0$.

Além disso, de acordo com o exemplo 3 da aula *O Teorema do Sanduíche*, do módulo anterior, vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Agora observe as seguintes *mudanças de variável* nos limites acima (vide teorema 4 da aula anterior):

- Por (3), vale $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\sin t} = 0$, de sorte que, tomando $x = \sqrt{\sin t}$ em (4), obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{\sin t}}{\sin t} = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

- Sendo $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{1 - \cos 0} = 0$, podemos tomar $x = \sqrt{1 - \cos t}$ em (2) para escrever

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{1 - \cos t}}{\sqrt{1 - \cos t}} = 1. \quad (6)$$

Desse modo, pelas relações (2), (4), (5), (6) e as regras de limites, vem que

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{\sin t})}{\sin(\sqrt{1 - \cos t})} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{\sin t})}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot \sqrt{\frac{t^2}{1 - \cos t}} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\sin(\sqrt{1 - \cos t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{\sin t})}{\sin t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \\ & \quad \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{t^2}{1 - \cos t}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\sin(\sqrt{1 - \cos t})} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 6 (IMO/1985 - Longlist). *Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem as duas condições a seguir:*

(a) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Solução. É claro que a função identicamente nula satisfaz as condições no enunciado. Veremos, a seguir, que ela é a

única. De fato, fixado um número real a , façamos $x = t + a$ e $y = t$ na equação funcional para obter

$$f(2t + a) + f(a) = 2f(t + a)f(t),$$

para qualquer número real t . Fazendo $t \rightarrow +\infty$ na igualdade acima e observando que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t + a) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t + 2a) = 0,$$

vem $f(a) = 0$. Por fim, como o número a foi escolhido arbitrariamente, provamos que f é identicamente nula. \square

2 Monotonicidade e limites laterais

Dados um subconjunto não vazio X de \mathbb{R} e uma função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, é lícito analisar o limite lateral à esquerda (resp. direita) de f num ponto a desde que existam pontos no domínio X de f arbitrariamente próximos de a e situados à esquerda (resp. à direita) de a .

De modo mais preciso, o estudo do limite à esquerda (resp. direita) de f em a faz sentido desde que a interseção $X \cap (a - \delta, a)$ (resp. $X \cap (a, a + \delta)$) seja não-vazia, para todo $\delta > 0$ ¹.

Assim, se o domínio X da função f for um intervalo (aberto, fechado ou semiaberto) I de extremos a e b , com $a < b$, então faz sentido considerar os limites laterais, à esquerda e à direita, de f em qualquer ponto c interior a I ². Entretanto, no ponto a (resp. b), apenas o limite lateral à direita (resp. à esquerda) de f faz sentido.

Por outro lado, se o domínio X da função f for o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros, então *não* faz sentido considerar limites laterais de f em ponto algum.

¹Na literatura, essa condição costuma ser expressa dizendo-se que a é um *ponto de acumulação à esquerda* (resp. *à direita*) do conjunto X . Compare com a definição apresentada na 1ª seção da aula *Limites de Funções*.

²Se tais limites existem, é outra história.

Como entre quaisquer dois números reais distintos há sempre um número racional³, faz sentido considerar os limites laterais de uma função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ em *qualquer* ponto $a \in \mathbb{R}$. A seguir, veremos um exemplo interessante, nesse sentido.

Dado um número real a , a função $R_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $R_a(x) = 2a - x$ é a reflexão em torno do ponto a : como $(R_a(x) + x)/2 = a$, a é o ponto médio do segmento de extremos x e $R_a(x)$.

Se a for um número racional, então $R_a(x)$ também será racional, sempre que x o for. Por outro lado, se a for irracional, então $R_a(x)$ *nunca* será racional, caso x o seja. Para $a \notin \mathbb{Q}$, vamos definir uma função $S_a : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, a *reflexão racional* em torno de a , a qual reterá algumas propriedades úteis da função R_a .

Qualquer número racional r se escreve, de modo único, como $r = m_r/n_r$, com $m_r \in \mathbb{Z}, n_r \in \mathbb{N}$ e m_r, n_r primos entre si. Definindo o inteiro p_r como a parte inteira de an_r , é imediato que $\frac{p_r}{n_r} < a < \frac{p_r+1}{n_r}$ (a primeira desigualdade é estrita porque a é irracional). Assim, definimos (acompanhe na figura 1)

$$S_a(r) = \frac{2p_r + 1}{n_r} - r.$$

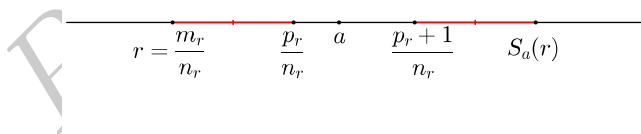


Figura 1: a reflexão racional S_a .

³Esse fato será demonstrado na proposição 2 da aula *Continuidade em um Ponto* do módulo de *Funções Contínuas*.

Exemplo 7. Mostre que a função S_a tem as seguintes propriedades:

$$(i) \quad r < a \Rightarrow S_a(r) > a.$$

$$(ii) \quad \lim_{r \rightarrow a^-} S_a(r) = a.$$

Prova. Para o item (i), se $r = \frac{m_r}{a_r} < a$, então $m_r < an_r$, de sorte que $m_r \leq \lfloor an_r \rfloor = p_r$, ou seja, $r = \frac{m_r}{a_r} \leq \frac{p_r}{n_r}$. Daí, $S_a(r) = \frac{p_r+1}{n_r} + (\frac{p_r}{n_r} - r) > a$.

Para estabelecer o item (ii), começamos observando que a desigualdade $r \leq \frac{p_r}{n_r} < a$, juntamente com o teorema do confronto (que continua válido nessa situação, como é imediato verificar), dão $\lim_{r \rightarrow a^-} \frac{p_r}{n_r} = a$.

Afirmção: $\lim_{r \rightarrow a^-} n_r = +\infty$.

Com efeito, dado um número natural arbitrário k , seja $\delta > 0$ a menor das distâncias $a - \frac{\lfloor aj \rfloor}{j}$, para $j = 1, 2, \dots, k$. Se, para algum número racional r , tivéssemos $a - r < \delta$ e $n_r \leq k$, valeria $\delta \leq a - \frac{\lfloor an_r \rfloor}{n_r} = a - \frac{p_r}{n_r} \leq a - r < \delta$, o que é impossível. Portanto, devemos ter $n_r > k$, para todo número racional $r \in (a - \delta, a)$, justificando a afirmação feita.

Segue da afirmação acima que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow a^-} S_a(r) &= \lim_{r \rightarrow a^-} \left(\frac{2p_r + 1}{n_r} - r \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow a^-} \left(2 \frac{p_r}{n_r} + \frac{1}{n_r} - r \right) \\ &= 2a + 0 - a = a, \end{aligned}$$

como desejado. □

Voltando à situação geral de uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, tome $a \in \mathbb{R}$ tal que haja sentido considerar $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$). Diremos que f é limitada à esquerda (resp. à direita) do ponto a quando, para algum $\delta > 0$, a restrição $f|_{X \cap (a-\delta, a)}$ (resp. $f|_{X \cap (a, a+\delta)}$) for limitada.

Evidentemente, se essa função f for monótona e $a \in \mathbb{R}$ for tal que haja sentido considerar *ambos* $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, então f será limitada à esquerda e à direita de a . (Justifique essa afirmação!). Nesse sentido, o teorema a seguir garante a existência dos limites laterais do parágrafo anterior, muito embora não dê pista alguma sobre como calculá-los.

Teorema 8. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona.*

- (a) *Se o limite à esquerda de f no ponto a fizer sentido e f for limitada à esquerda de a , então existe $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.*
- (b) *Se o limite à direita de f no ponto a fizer sentido e f for limitada à direita de a , então existe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.*

Esse teorema será demonstrado na 2ª parte da aula *Continuidade em um Ponto* do módulo de *Funções Contínuas*. Todavia, podemos demonstrar a seguinte versão do teorema 8.

Proposição 9. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. Se o limite à esquerda (resp. à direita) de f no ponto a fizer sentido e f for ilimitada à esquerda (resp. à direita) de a , então $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$) existe e é infinito.*

Prova. Suponhamos que f seja monótona não-decrescente. Trataremos apenas do limite lateral à esquerda, sendo o argumento para o limite à direita completamente análogo. Afirmamos que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$. Com efeito, fixemos um ponto $b \in X$, com $b < a$. Dado um número $M > 0$ arbitrário, deve existir algum $x_0 \in X \cap (b, a)$ satisfazendo $f(x_0) > M$. Caso contrário, teríamos $f(b) \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in X \cap (b, a)$, contradizendo o fato de f ser ilimitada à esquerda de a . Logo, sendo $f(x_0) > M$, $x_0 < a$, definimos o número positivo $\delta = a - x_0$ para ter

$$\begin{aligned} x \in X \cap (a - \delta, a) &\Rightarrow a - x < a - x_0 \Rightarrow x > x_0 \\ &\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) > M. \end{aligned}$$

Isso estabelece a afirmação e encerra a demonstração. \square

Observação 10. Com adaptações naturais, é possível obter versões do teorema 8 e da proposição 9 para limites no infinito. Por exemplo, se $f : [a, +\infty)$ for uma função crescente, então existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, sendo esse limite finito ou $+\infty$, conforme f seja ou não limitada.

A solução do próximo problema (vide [3]) faz uso do teorema 8.

Exemplo 11 (IMO/2020 - Shortlist). Determine todas as funções $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ satisfazendo

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1, \quad (7)$$

para quaisquer números reais x e y .

Solução. Se f é uma função nas condições do enunciado, afirmamos que f é crescente. Primeiro vejamos que f é injetiva. Fazendo $x = 1$ em (7), obtemos

$$y = f(1)f(y) + 1 - f(1 + f(y)).$$

Assim, se $f(y_1) = f(y_2)$, então

$$\begin{aligned} y_1 &= f(1)f(y_1) + 1 - f(1 + f(y_1)) \\ &= f(1)f(y_2) + 1 - f(1 + f(y_2)) \\ &= y_2, \end{aligned}$$

ou seja, f é injetiva.

Agora vamos fixar $y > 0$ e observar que a função $g(x) = x + f(xy)$, $x > 0$, também é injetiva. Realmente,

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\Rightarrow f(g(x)) = f(g(x')) \\ &\Rightarrow f(x)f(y) + 1 - y = f(x')f(y) + 1 - y \\ &\Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'. \end{aligned}$$

Dessa forma, se $0 < x_1 < x_2$, temos $g(x_1/y) \neq g(x_2/y)$ ou, ainda, $\frac{x_1}{y} + f(x_1) \neq \frac{x_2}{y} + f(x_2)$, o que também pode ser escrito como $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} \neq \frac{1}{y}$, relação válida para *todo*

$y > 0$. Como qualquer número positivo é da forma $\frac{1}{y}$, para algum $y > 0$, somos levados a concluir que $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} \leq 0$, ou melhor, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} < 0$, pois f é injetiva. Daí segue que $f(x_1) < f(x_2)$, demonstrando a afirmação do início.

Pelo teorema 8, para cada $a \geq 0$ existe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, o qual também é um número não-negativo. (Por quê?) Sejam

$$p = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \rightarrow p^+} f(x).$$

Fazendo $x \rightarrow 0^+$ em (7), vê-se que $f(x), x + f(xy) \rightarrow p$, logo $f(x + f(xy)) \rightarrow q$ e, portanto, $q + y = pf(y) + 1$, para cada $y > 0$. Em particular, devemos ter $p > 0$, pois, do contrário, teríamos $q + y = 1$, para todo $y > 0$, o que é um absurdo. Logo, f é (a restrição de) uma função afim: $f(y) = \frac{1}{p}y + \frac{q-1}{p}$, isto é, $f(y) = \alpha y + \beta$, em que $\alpha = \frac{1}{p} > 0$ e $\beta = \frac{q-1}{p}$. Substituindo essa última relação na equação funcional, obtemos $\alpha(x + \alpha xy + \beta) + \beta + y = (\alpha x + \beta)(\alpha y + \beta) + 1$, ou seja,

$$(\alpha - \alpha\beta)x + (1 - \alpha\beta)y + \alpha\beta + \beta - \beta^2 - 1 = 0, \quad (8)$$

para quaisquer $x, y > 0$. Fazendo $x = y \rightarrow 0$, vem $\alpha\beta + \beta - \beta^2 - 1 = 0$. Retornando a equação (8), fazemos $y \rightarrow 0$ para obter $(\alpha - \alpha\beta)x = 0$, para todo x , isto é, $\alpha - \alpha\beta = 0$, logo, $\beta = 1$. Daí, $\alpha \cdot 1 + 1 - 1^2 - 1 = 0$ dá $\alpha = 1$, de modo que $f(x) = x + 1$.

Reciprocamente, é fácil verificar que $f(x) = x + 1$ é uma solução da equação funcional (7). Assim, $f(x) = x + 1$ é a única solução. \square

2.1 A função exponencial

Seja b um número real positivo. Se a é um número real qualquer, queremos definir a potência b^a como o único número real que admite como aproximações por falta (resp. por excesso) as potências b^r , com r racional e menor (resp. maior) que a . Mais precisamente, queremos escrever

$$b^a := \lim_{\substack{r \rightarrow a \\ r \in \mathbb{Q}}} b^r. \quad (9)$$

Precisamos, pois, demonstrar a existência do limite no segundo membro da igualdade acima.

Se o número racional r se escreve como $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, lembre que, por definição, $b^r = \sqrt[n]{b^m}$. Na aula *Funções Exponenciais e suas Propriedades*, do módulo Função Exponencial, prova-se que a função exponencial de variável racional, $f_b : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_b(r) = b^r$, é crescente ou decrescente, conforme se tenha $b > 1$ ou $0 < b < 1$, respectivamente (obviamente, $f_1 \equiv 1$, ou seja, $1^r = 1$, para cada r racional). Desse modo, para qualquer $b > 0$, f_b é uma função monótona.

Afirmamos, pois, que f_b será limitada à esquerda e à direita de a , para todo número real a . De fato, tomando números racionais r e s tais que $r < a - 1, a + 1 < s$, vale

$$\min\{f_b(r), f_b(s)\} \leq f_b(x) \leq \max\{f_b(r), f_b(s)\},$$

para cada $x \in \mathbb{Q} \cap (a - 1, a + 1)$. Daí, pelo teorema 8, existem os limites laterais $\lim_{r \rightarrow a^-} b^r$ e $\lim_{r \rightarrow a^+} b^r$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Resta, pois, demonstrar que esses limites laterais são iguais. Para tanto, começamos com o seguinte

Lema 12. $\lim_{r \rightarrow 0} b^r = 1$.

Prova. Para fixar as ideias, suponhamos $b > 1$. Começemos mostrando o limite lateral

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} b^r = 1. \quad (10)$$

Recordando a relação $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$ (veja o exemplo 8 da aula anterior), dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 satisfazendo $b^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon$. Logo, $r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \frac{1}{n_0} \Rightarrow 1 < b^r < b^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$, isto é,

$$r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \frac{1}{n_0} \Rightarrow |b^r - 1| < \varepsilon,$$

demonstrando a igualdade desejada. Agora, (10) dá

$$\lim_{r \rightarrow 0^-} b^r \stackrel{r=-s}{=} \lim_{s \rightarrow 0^+} b^{-s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{b^s} = 1.$$

Por fim, como os limites laterais $\lim_{r \rightarrow 0^\pm} b^r$ existem e são iguais a 1, o limite bilateral $\lim_{r \rightarrow 0} b^r$ também existe e vale 1. \square

Proposição 13. *Para cada número real a , o limite $\lim_{r \rightarrow a} b^r$ existe e é positivo. Além disso, se a for um número racional, digamos $a = \frac{m}{n}$, então $\lim_{r \rightarrow a} b^r = \sqrt[n]{b^m}$.*

Prova. Continuamos supondo $b > 1$. Primeiramente, vejamos que cada limite lateral $\lim_{r \rightarrow a^-} b^r$ é positivo. De fato, fixando um número racional $s < a$, temos $b^s < b^r$, para cada número racional r do intervalo (s, a) . Fazendo $r \rightarrow a^-$, o teorema da permanência do sinal nos dá $0 < b^s \leq \lim_{r \rightarrow a^-} b^r$.

Agora seja a um número irracional e considere a reflexão racional S_a em torno de a (exemplo (7)). Uma vez que $S_a(r) \rightarrow a^+$ quando $r \rightarrow a^-$, temos $\lim_{r \rightarrow a^+} b^r = \lim_{r \rightarrow a^-} b^{S_a(r)}$, de onde segue que

$$\begin{aligned} \frac{\lim_{r \rightarrow a^+} b^r}{\lim_{r \rightarrow a^-} b^r} &= \frac{\lim_{r \rightarrow a^-} b^{S_a(r)}}{\lim_{r \rightarrow a^-} b^r} \\ &= \lim_{r \rightarrow a^-} \frac{b^{S_a(r)}}{b^r} \\ &= \lim_{r \rightarrow a^-} b^{S_a(r) - r} \\ &= 1, \end{aligned}$$

pelo lema 12, já que $S_a(r) - r \rightarrow a - a = 0$, quando $r \rightarrow a^-$. Assim, os limites laterais da função exponencial f_b no ponto a existem e são iguais, de modo que também existe o limite bilateral $\lim_{r \rightarrow a} b^r$.

Finalmente, seja a um número racional. Assim,

$$\lim_{s \rightarrow a} b^s = b^a \lim_{s \rightarrow a} b^{s-a} \stackrel{r=s-a}{=} b^a \lim_{r \rightarrow 0} b^r = b^a,$$

pelo lema 12. \square

Pela proposição anterior, a relação (9) define uma função $f_b : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, a *função exponencial de base b* , estendendo

a função exponencial de base b e expoente racional. Para cada número real x , temos

$$f_b(x) = b^x := \lim_{\substack{r \rightarrow x \\ r \in \mathbb{Q}}} b^r.$$

Concluimos este material colecionando, no próximo resultado, as principais propriedades da função exponencial.

Teorema 14.

- (i) f_b é uma função crescente (resp. decrescente) se $b > 1$ (resp. $0 < b < 1$).
- (ii) Para cada número real a , $\lim_{x \rightarrow a} b^x = b^a$.
- (iii) $b^x b^y = b^{x+y}$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
- (iv) $(b^x)^y = b^{xy}$, quaisquer que sejam os números reais x, y .
- (v) $(bc)^x = b^x c^x$, para quaisquer $b, c > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Prova.

(i) Dados dois números reais x, y , com $x < y$, tome números racionais u e v tais que $x < u < v < y$. Se $b > 1$, então $b^r < b^u < b^v < b^s$ para quaisquer números racionais r e s satisfazendo $x < r < u < v < s < y$. Fazendo $r \rightarrow x^+$ e $v \rightarrow y^-$, o teorema de permanência do sinal garante que

$$b^x = \lim_{r \rightarrow x^+} b^r \leq b^u < b^v \leq \lim_{s \rightarrow y^-} b^s = b^y,$$

de onde se conclui a desigualdade $b^x < b^y$. Assim, f_b é crescente (prova-se do mesmo modo que $0 < b < 1 \Rightarrow f_b$ decrescente).

(ii) Segue da monotonicidade de f_b que os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^-} b^x$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} b^x$ existem. Por outro lado, é evidente que $\lim_{x \rightarrow a^-} b^x = \lim_{\substack{r \rightarrow a^- \\ r \in \mathbb{Q}}} b^r$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} b^x = \lim_{\substack{r \rightarrow a^+ \\ r \in \mathbb{Q}}} b^r$, de onde seguem as igualdades $\lim_{x \rightarrow a^-} b^x = b^a = \lim_{x \rightarrow a^+} b^x$, estabelecendo o que nos foi proposto.

(iii) As demais propriedades seguirão das relações já estabelecidas para a função exponencial de variável racional “passando-se o limite”. De fato, sabemos que $b^r b^s = b^{r+s}$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$. Fazendo $r \rightarrow x$, vem $b^x b^s = b^{x+s}$. Agora fazendo $s \rightarrow y$, $b^x b^s \rightarrow b^x b^y$, ao passo que, pelo item anterior, $b^{x+s} \rightarrow b^{x+y}$.

(iv) De $(a^r)^s = a^{rs}$, $r, s \in \mathbb{Q}$, e as regras aritméticas para limites, vem $(a^x)^s = a^{xs}$, ao se fazer $r \rightarrow x$. Se agora fazemos $s \rightarrow y$, obtemos o resultado desejado.

(v) Deixamos esse item ao encargo do leitor. \square

Dicas para o Professor

Um fator complicador na solução do exemplo (11) é a impossibilidade de se fazer $x = 0$ ou $y = 0$ na relação funcional (7). Sugerimos que o professor discuta com sua turma a variante daquele exemplo que consiste em tomar o intervalo fechado $[0, +\infty)$ como domínio da função f . A resposta, entretanto, fica inalterada.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, vol. 1. 6ª ed. LTC, 2018.
3. IMO/2020 - Shortlisted Problems (with solutions)
<https://www.imo-official.org/problems/IMO2020SL.pdf>