Material Teórico - Probabilidade – Miscelânea de Exercícios

Cálculo de probabilidades - Parte 2

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

17 de agosto de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Cálculo de probabilidades

Damos continuidade ao estudo de probabilidades resolvendo mais exercícios. Lembre-se de que, nas aulas sobre contagem, usamos a notação $C_{n,r}$ para o número de maneiras de escolher r objetos distintos de um conjunto com n objetos. Assim, temos que

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Exemplo 1. *Imagine um campo de futebol com 23 pessoas, dois times de 11 jogadores cada, mais um juiz. Qual é a probabilidade de que pelo menos duas dessas 23 pessoas aniversariem num mesmo dia do ano? (Assuma que o ano não é bissexto, ou seja, tem 365 dias.)*

Solução. É mais simples calcular primeiro a probabilidade de que quaisquer duas pessoas tenham aniversários em dias diferentes. A primeira pessoa pode ter nascido em qualquer data, a segunda deverá nascer num dia diferente da primeira, a terceira num dia diferente das duas anteriores e assim por diante. Obtemos, então, a probabilidade

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{365-1}{365}\cdot\frac{365-2}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-22}{365},$$

ou seja,

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{343}{365}=\frac{365!}{342!\cdot 365^{23}}.$$

Assim, a probabilidade requisitada no enunciado é a probabilidade do evento acima não acontecer, ou seja, é igual a

$$1-\frac{365!}{342!\cdot 365^{23}}.$$

Sem acesso a um computador ou calculadora iríamos parar por aqui, já que os cálculos acima são bem complicados de se fazer manualmente. Porém, com auxílio de uma planilha eletrônica é possível calcular o valor acima e ver que ele é aproximadamente 50,7%. □

Observação 2. *Ainda em relação ao exemplo acima, é possível mostrar que 23 é o menor número de pessoas para o qual a chance de duas fazerem aniversário no mesmo dia seja maior do que 50%.*

Além disso, é possível calcular que se o grupo tivesse (apenas) 50 pessoas, no lugar de 23, haveria cerca de 97% de chance de duas delas aniversariarem no mesmo dia. Isso é bastante impressionante, uma vez que, ingenuamente, poderíamos achar que, ao escolher apenas 50 datas num universo de 365, teríamos boas chances de todas serem diferentes. Mas ao contrário do que se pensa, apesar de não haver garantias *de que duas pessoas farão aniversário no mesmo dia, é muito provável que isso aconteça.*

Exemplo 3 (UFF)**.** *Um certo provedor de Internet oferece a seus usuários 15 (quinze) salas de bate-papo. Três usuários decidiram acessar as salas, tendo cada um escolhido, (uniformemente e) independentemente, uma sala. Assinale a opção que expressa a probabilidade de os três usuários terem escolhido a mesma sala.*

(a) $\dfrac{1}{15^2}$.

(b) $\dfrac{1}{15^3}$.

(c) $\dfrac{1}{3^3}$.

(d) $\dfrac{3}{15}$.

(e) $\dfrac{3^3}{15^3}$.

Solução. Para facilitar a descrição do raciocínio, vamos supor que os usuários escolhem suas salas um após o outro (sem, é claro, nenhum deles ter ciência da escolha feita pelos demais). Isso não altera a probabilidade que desejamos calcular.

O primeiro usuário pode escolher qualquer uma das salas. Contudo, para que todos fiquem na mesma sala, o segundo e o terceiro devem escolher a mesma sala do primeiro. Para cada um deles, isso acontece com probabilidade $1/15$ e, como os dois eventos são independentes, a probabilidade desejada é $\left(\frac{1}{15}\right)^2=\frac{1}{15^2}$. Assim, a alternativa correta é (a). □

Observação 4. *Muitos alunos erram o exercício anterior pensando que, como temos três usuários e a probabilidade seria $1/15$ para cada um deles, o resultado deveria ser $(1/15)^3$. Este raciocínio pode ser consertado se notarmos que, nele, cada usuário escolheu uma sala específica (a mesma sala para todos); porém, ainda teríamos que multiplicar a probabilidade resultante por 15, uma vez que há 15 possibilidades para a sala escolhida.*

Exemplo 5. *Na Lotomania, o apostador escolhe 50 números, dentre 100 números possíveis. O sorteio consiste em selecionar 20 dos 100 números, sem repetição. Há um prêmio maior, para quem acertar os 20 números (isto é, todos os 20 números sorteados estão entre os 50 escolhidos pelo apostador), e há um prêmio menor, para quem não acertar nenhum dos 20 números (isto é, todos os 20 números sorteados não estão dentre os 50 escolhidos). Calcule a probabilidade de uma aposta ganhar:*

(a) *o prêmio maior.*

(b) *o prêmio menor.*

Solução errada. Ao resolver este problema, uma ideia comum, mas errada, é a seguinte: pensar que o espaço amostral consiste de cada uma das $C_{100,50}$ possibilidades de se escolher 50 números dentre os 100, enquanto que os casos favoráveis são conjuntos de 20 números escolhidos, dentre os 50 sorteados. Argumentando dessa forma, obteríamos a probabilidade:

$$\frac{C_{50,20}}{C_{100,50}}.$$

Conceitualmente, essa solução está errada por vários motivos. Primeiramente, o conjunto de casos favoráveis deveria ser um subconjunto do espaço amostral. Contudo, na escolha acima, cada caso favorável é um conjunto de 20 elementos, ao passo que cada elemento do espaço amostral é um conjunto de 50 elementos. Assim, os casos favoráveis não são elementos do espaço amostral (como deveriam ser) mas sim elementos (de alguns) dos elementos do espaço amostral.

Em segundo lugar, no denominador do quociente acima, estamos pensando na quantidade de apostas e no numerador na quantidade de sorteios e a razão entre essas não é relevante. Nas soluções abaixo, teremos que escolher entre resolver o problema pensando exclusivamente nas apostas ou nos sorteios. □

Solução 1 (pensando nas apostas). (a) Considere que o espaço amostral consiste das $C_{100,50}$ possíveis apostas. Agora, suponha que foi realizado o sorteio de 20 números. O que queremos saber é quantas dessas $C_{100,50}$ apostas contêm todos os 20 números sorteados. De outra forma, queremos saber de quantas maneiras podemos montar um conjunto de 50 números que contenha todos os 20 números sorteados. Para isso, além dos dos 20 números sorteados basta escolher os outros 30 números, dentre os 80 não sorteados, o que pode ser feito de $C_{80,30}$ maneiras.

Veja que essa quantidade não depende de quais foram exatamente os 20 números sorteados, de modo que ela representará o número de casos favoráveis para quaisquer que sejam esses 20 números. Assim, a probabilidade de ganhar o prêmio maior é:

$$\frac{C_{80,30}}{C_{100,50}} = \frac{\frac{80!}{30!\,50!}}{\frac{100!}{50!\,50!}} = \frac{80!}{30!\,50!} \cdot \frac{50!\,50!}{100!} = \frac{80!\,50!}{100!\,30!}$$
$$= \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 31}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \cdots \cdot 81}.$$

Com o auxílio de uma calculadora, vemos que esse valor é aproximadamente $1/11\,372\,635$.

(b) Agora, queremos contar quantas são as apostas que não contêm nenhum dos 20 números sorteados. Tais apostas são aquelas em que todos os 50 números foram escolhidos dentre os 80 não sorteados, ou seja, temos $C_{80,50}$ dessas apostas. Com isso, a probabilidade de se ganhar o prêmio menor é:

$$\frac{C_{80,50}}{C_{100,50}}.$$

É interessante observar que, como $30 + 50 = 80$, temos $C_{80,50} = C_{80,30}$, de modo que a probabilidade acima, para nossa surpresa, é exatamente a mesma que calculamos no item (a). Isso demonstra que o valor do prêmio menor deveria, na verdade, deveria ser o igual ao do prêmio maior (mas não é, por motivos de "propaganda"). □

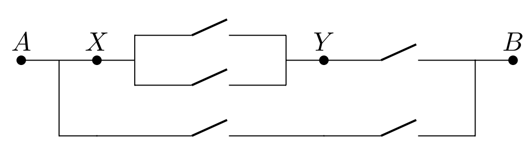
Solução 2 (pensando no sorteio). (a) Considere que foi escolhido certo jogo com 50 números e pense no espaço amostral como o conjunto de todos os possíveis sorteios, ou seja, um total de $C_{100,20}$ possibilidades. Dessas possibilidades, queremos contar quantas são tais que todos os 20 números foram sorteados dentre os 50 da aposta. Posto dessa forma, vemos imediatamente que há exatamente $C_{50,20}$ casos favoráveis. Temos, então, a probabilidade:

$$\frac{C_{50,20}}{C_{100,20}} = \frac{\frac{50!}{20!\,30!}}{\frac{100!}{20!\,80!}} = \frac{50!}{20!\,30!} \cdot \frac{20!\,80!}{100!} = \frac{80!\,50!}{100!\,30!},$$

assim como havíamos calculado na solução anterior.

(b) Neste caso, queremos que todos os 20 números sorteados sejam escolhidos dentre os números que não fazem parte dos selecionados pelo apostador. Como o total de números é 100, tendo sido escolhidos 50 números, sobram outros 50. Assim, o número de casos favoráveis é igual a $C_{50,20}$, exatamente como na segunda solução do item (a). Assim, a probabilidade também é $\frac{C_{50,20}}{C_{100,20}}$, como já sabíamos. □

Exemplo 6. *No circuito elétrico da figura abaixo, em que existe tensão entre os pontos A e B, calcule a probabilidade de passar corrente entre A e B sabendo que a probabilidade de cada chave estar aberta é $1/2$ e que o fato de cada chave estar aberta ou fechada é independente de qualquer conjunto de outras chaves.*



Solução. Lembre-se de que, se R e S são dois eventos, então a probabilidade para que pelo menos um deles aconteça é calculada pela fórmula:

$$\mathbb{P}(R \cup S) = \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(R \cap S). \qquad (1)$$

Lembre-se também de que, quando R e S são eventos independentes, temos $\mathbb{P}(R \cap S) = \mathbb{P}(R) \cdot \mathbb{P}(S)$; portanto,

$$\mathbb{P}(R \cup S) = \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(R) \cdot \mathbb{P}(S). \qquad (2)$$

Agora, vamos chamar de R o evento de existir um caminho fechado entre A e B indo pela bifurcação de cima (isto é, passando pelo pontos X, Y e chegando a B) e de S o evento de existir um caminho fechado indo pela bifurcação de baixo.

Para calcular a probabilidade de R, começamos calculando a probabilidade de passar corrente de X até Y.

Como temos novamente uma bifurcação, para haver corrente deve haver corrente no subcaminho de cima ou no de baixo. Cada um deles possui apenas uma chave, que está ligada com probabilidade $1/2$. Assim, a probabilidade de que uma ou outra esteja ligada é:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Continuando no caminho principal de cima, a probabilidade de passar corrente de Y a B é $1/2$. Logo, a probabilidade de passar corrente por cima é:

$$\mathbb{P}(R) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Por outro lado, a probabilidade de S é bem mais simples: há duas chaves e ambas precisam estar ligadas, logo,

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Por fim, aplicando a equação (1), temos que a probabilidade de passar corrente de A até B é:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R \cup S) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{12}{32} + \frac{8}{32} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32}.\end{aligned}$$ □

Observação 7. *É importante redobrar a atenção para o fato de que a equação* (2) *só funciona com eventos independentes (apesar de que* (1) *funciona sempre).*

Ainda neste caso particular (R e S independentes), há outra maneira de calcular $\mathbb{P}(R \cup S)$: considerando o evento complementar $(R \cup S)^{\complement}$, temos que

$$\mathbb{P}(R \cup S) = 1 - \mathbb{P}\left((R \cup S)^{\complement}\right). \tag{3}$$

Por outro lado, $(R \cup S)^{\complement} = R^{\complement} \cap S^{\complement}$ e, como R e S são independentes, temos que $R^{\complement}$ e $S^{\complement}$ também são independentes. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((R \cup S)^{\complement}\right) &= \mathbb{P}(R^{\complement} \cap S^{\complement}) \\ &= \mathbb{P}(R^{\complement})\,\mathbb{P}(S^{\complement}) \\ &= \big(1 - \mathbb{P}(R)\big)\big(1 - \mathbb{P}(S)\big).\end{aligned}$$

Substituindo a fórmula acima na equação (3)*, teríamos:*

$$\mathbb{P}(R \cup S) = 1 - \big(1 - \mathbb{P}(R)\big)\big(1 - \mathbb{P}(S)\big). \tag{4}$$

Com isso, poderíamos usar (4)*, ao invés de* (2) *(tente fazer isso!).*

O próximo exemplo traz o chamado "Problema de Monty Hall", que é um exemplo "clássico" e bastante conhecido nos círculos das olimpíadas de Matemática. Ele é inspirado em um programa televisivo dos Estados Unidos chamado "Let's Make a Deal", exibido na década de 1970 e apresentado pelo Monty Hall. Adaptações também foram exibidas no Brasil por vários apresentadores desde a década de 80, por exemplo, a "Porta dos Desesperados" do programa do apresentador Sérgio Malandro.

Exemplo 8. *Em certo programa de auditório há três portas fechadas. Atrás de uma das portas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há um bode, mas não é possível ver em qual até abrir as portas. Você participa do jogo e seu objetivo é ganhar o carro (mesmo não tendo nada contra bodes).*

Inicialmente, você escolhe uma porta. Em seguida, o apresentador (que sabe onde o carro e os bodes estão) abre uma porta diferente da que você escolheu e (propositalmente) mostra que há um bode. Restaram, portanto, duas portas fechadas. O apresentador pergunta se você quer continuar com a porta escolhida inicialmente ou prefere passar para a outra porta, ainda fechada. Qual a probabilidade de ganhar o carro em cada caso?

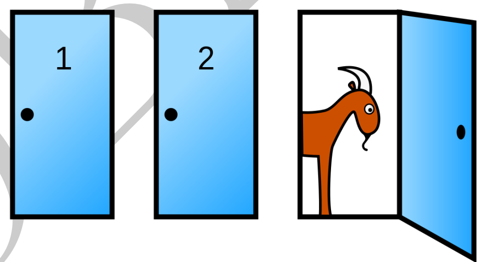


Figura 1: as três portas do programa de Monty Hall, após uma deles ter sido aberta. Fonte: domínio público.

Solução. À primeira vista, pode parecer que restam duas portas e, por isso, a probabilidade de estar com a porta correta é $1/2$; sendo assim, trocando ou não de porta o participante teria a mesma chance de ganhar.

Porém, é importante observar que, nesse problema, a escolha do apresentador não é aleatória. Ele abre uma porta onde sabe que o carro não está. Agora, vamos analisar as duas estratégias.

Estratégia em que você fica com a porta que escolheu inicialmente. A única forma de ganhar é o carro é se ele estava atrás de sua porta desde o início do jogo. Como no início havia três portas e apenas uma delas com um carro atrás, essa probabilidade é igual a $1/3$. Veja que, independentemente de qual porta você escolheu, o apresentador (que sabe onde estão os bodes) sempre poderá abrir uma porta atrás da qual há um bode. Assim, isso não altera sua probabilidade inicial.

Estratégia em que você troca de porta. Neste caso, a probabilidade é o complementar da estratégia anterior. De fato, se no início do jogo você havia escolhido a porta onde está o carro, então, ao trocar de porta, você perderia o carro (com probabilidade $1/3$). Por outro lado, se no início do jogo você havia escolhido qualquer uma das duas portas com o bode, então, como o apresentador mostra qual a outra porta com o bode, ao trocar de porta você ganhará o carro. E isso acontece com probabilidade $2/3$. □

Exemplo 9. *Em uma época distante, um condenado foi levado perante seu rei, que fez com ele um trato. O rei colocou à frente do condenado* 50 *bolas brancas e* 50 *bolas pretas, e pediu que o condenado distribuísse essas bolas em duas caixas, com a única condição de que nenhuma das duas caixas ficasse vazia. Depois disso, o condenado teve seus olhos vendados e as caixas foram embaralhadas. O condenado, então, escolheu uma das caixas (ao acaso) e sorteou uma bola da caixa escolhida. Se a bola sorteado fosse branca, o condenado seria perdoado; caso contrário, ele teria de cumprir sua pena. Como o condenado devia distribuir as bolas nas caixas para que tivesse a maior chance possível de ser libertado?*

Solução. Como há 100 bolas, pelo menos uma das duas caixas terá no máximo 50 bolas. Seja z o número de bolas em tal caixa, de modo que $1 \le z \le 50$, e seja x o número de bolas brancas na mesma caixa. Dessa forma, a outra caixa possui $50 - x$ bolas brancas, de um total de $100 - z$ bolas. Com essas distribuições, a probabilidade do condenado ser libertado é:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{50 - x}{100 - z}.$$

Simplificando, temos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x(100 - z) + z(50 - x)}{z(100 - z)}\right)$$

ou, ainda,

$$\frac{(50 - z)x + 25z}{z(100 - z)}. \tag{5}$$

Queremos saber para que valores de x e z a expressão acima é máxima, lembrando que $0 \le x \le z$ e $1 \le z \le 50$.

Fixado um valor para z, como $50 - z$, z e $100 - z$ são positivos, é desejável escolher x maior possível, ou seja, $x = z$ (isso mostra que em uma das caixas devemos colocar apenas bolas brancas). Fazendo a substituição $x = z$ em (5), obtemos

$$\frac{(50 - z)z + 25z}{z(100 - z)} = \frac{75z - z^2}{z(100 - z)} = \frac{75 - z}{100 - z}.$$

Agora, queremos encontrar o valor de z, com $1 \le z \le 50$, que maximize $\frac{75-z}{100-z}$. Testando sucessivamente $z = 1, 2, 3 \ldots$, obtemos as probabilidades:

$$\frac{74}{99} > \frac{73}{98} > \cdots > \frac{25}{50}.$$

Assim, a maior probabilidade de soltura é obtida quanto $z = 1$, de forma que o condenado deveria colocar uma única bola branca em uma das caixas e todas as demais na outra. Conforme discutimos acima, nessa distribuição a probabilidade do condenado ser libertado é $\frac{74}{99}$. □

2 Erros comuns em probabilidade

Seguindo a mesma ideia da aula "Professor, onde foi que eu errei" do módulo "Aplicações das Técnicas Desenvolvidas" (sobre contagem), nesta seção exibiremos alguns erros comuns na resolução de problemas sobre probabilidade.

Exemplo 10. *Um dado honesto possui quatro de suas faces de valor igual a* 1*, uma face de valor* 2 *e uma de valor* 3*. Qual a probabilidade de se obter o valor* 1 *ao jogar o dado?*

Observação. "Honesto" para um dado quer dizer que qualquer uma de suas faces pode ser obtida com igual probabilidade quando ele é jogado. □

Solução errada. Ao jogar o dado, obtemos 1, 2 ou 3. Como há três possíveis valores, a probabilidade de se obter o valor 1 é igual a $1/3$. □

Análise e solução correta. A solução acima está claramente errada. Já que a face de valor 1 aparece mais vezes, é natural que ela tenha uma probabilidade maior do que as demais de ser obtida. De fato, o dado possui 6 faces e o valor 1 pode ser obtido em quatro delas. Então, a probabilidade de obter valor 1 é igual a $4/6$, ou seja, $2/3$.

Há duas maneiras de formalizar a solução acima usando espaços de probabilidade.

Numa primeira abordagem, podemos, por um momento, ignorar os valores escritos nas faces e nomeá-las como $f_1, \ldots, f_6$. Temos o espaço amostral $\Omega = \{f_1, \ldots, f_6\}$ e, por termos um dado honesto, cada face tem a mesma probabilidade de ser obtida, ou seja, a probabilidade p_i de obtermos a face f_i é $p_i = 1/6$, para todo $i \in \{1, \ldots, 6\}$. Agora, a cada face iremos atribuir um valor. Digamos que as faces $f_1, \ldots, f_4$ possuem valor 1, a face f_5 possui valor 2 e a face f_6 possui valor 3. Então, o evento de se obter valor 1 corresponde ao conjunto $\{f_1, \ldots, f_4\}$, e a probabilidade de obter um elemento deste conjunto é $p_1 + \ldots + p_4 = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

A segunda maneira de formalizar a solução é considerar o espaço amostral como o conjunto de possíveis valores $\Omega' = \{1, 2, 3\}$ e chamar de q_i a probabilidade de se obter o valor i, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Como vimos, neste caso *não* vale que $q_1 = q_2 = q_3$ (e dizemos que o espaço amostral *não é equiprovável*). De fato, vale que $q_2 = q_3$, pois os valores 2 e 3 aparecem exatamente uma vez no dado, mas $q_1 = 4q_2$, pois o valor 1 aparece quatro vezes. Como $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, substituindo q_2 e q_3 por $\frac{q_1}{4}$, obtemos $q_1 = 4/6$ e $q_2 = q_3 = 1/6$. Veja que q_1 é a resposta desejada para o problema. □

Exemplo 11. *Jogamos dois dados honestos, cada um com faces numeradas de* 1 *a* 6*. Qual a probabilidade de obtermos soma* 3*?*

Solução errada 1. Veja que a menor soma possível dos dados é 2 e a maior é 12. Sendo assim, há 11 possíveis somas. Logo, a probabilidade de obter soma 3 é uma dentre onze, ou seja, igual a 1/11. □

Análise do erro 1. Assim como no exemplo anterior, a solução acima assume um espaço amostral com 11 elementos (um elemento para cada soma possível) onde cada elemento poderia ser obtido com igual probabilidade (espaço equiprovável). Contudo, algumas das somas são mais prováveis de serem obtidas do que outras. Por exemplo, para que a soma seja 2 é preciso que os números em ambos os dados sejam iguais a 1; mas, para a soma ser 7, há várias possibilidades, uma vez que $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$. Assim, a probabilidade de cada soma não é constante e igual a 1/11. □

Solução correta. Vamos anotar os valores obtidos nos dados como pares ordenados (a, b). Há 6 possíveis valores para a e 6 possíveis valores para b, logo, há 36 possíveis resultados para o lançamento:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Veja que cada uma dessas possibilidades possui a mesma chance de ser obtida. Dentre elas, há duas em que a soma dos valores é igual a 3, a saber, (1,2) e (2,1). Logo, a probabilidade de a soma ser 3 é 2/36. □

Solução errada 2. Vejamos mais uma solução errada bastante comum. Como os dois dados são idênticos, é comum interpretar que, ao visualizar o resultado dos dados, não conseguimos atribuir uma ordem aos números. Assim, considera-se que o espaço amostral contém os seguintes elementos:

(1, 1)					
{2, 1}	(2, 2)				
{3, 1}	{3, 2}	(3, 3)			
{4, 1}	{4, 2}	{4, 3}	(4, 4)		
{5, 1}	{5, 2}	{5, 3}	{5, 4}	(5, 5)	
{6, 1}	{6, 2}	{6, 3}	{6, 4}	{6, 5}	(6, 6)

Acima, temos uma lista composta por 21 possíveis resultados para os dois dados. Dentre elas, há $C_{6,2} = 15$ maneiras de escolher valores diferentes para os dados e 6 maneiras de escolher valores iguais; também, há apenas uma possibilidade em que a soma dos valores é igual a 3 (a qual corresponde ao conjunto $\{2, 1\}$). Portanto, conclui-se (erroneamente) que a probabilidade desejada é 1/21. □

Análise do erro 2. Assim como na análise da primeira solução errada, o que acontece na solução acima é que o espaço de probabilidades considerado não é equiprovável, ou seja, não é verdade que todas as possibilidades acima têm a mesma probabilidade. De fato, ainda que os dois dados sejam indistinguíveis, eles são dois dados independentes. Assim, o resultado $(1, 1)$ só pode ser obtido de uma única forma (o número 1 deve ser obtido em ambos os dados), enquanto o resultado $\{1, 2\}$ pode ser obtido de duas formas (o número 1 no primeiro dado e o número 2 no segundo, ou vice-versa). Por isso, a solução de resposta 1/21 está errada.

Para fazer uso do espaço amostral com 21 possibilidades, deveríamos considerar uma probabilidade x para cada resultado em que os valores dos dados são diferentes e outra probabilidade y para cada resultado em que os valores são iguais. Então, deveríamos ter $15x + 6y = 1$ e $x = 2y$. Resolvendo esse sistema, temos que $y = 1/36$ e $x = 2/36$. Assim, a probabilidade de que o resultado dos dados seja $\{1, 2\}$ é igual a $2/36$. □

Observação. Não haveria qualquer diferença se, no lugar de lançar dois dados idênticos simultaneamente, o problema pedisse para lançar um único dado duas vezes seguidas. □

Exemplo 12. *Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de* 1 *a* 6*, são lançados simultaneamente. Calcule a probabilidade de a soma dos resultados de dois dados quaisquer ser igual ao resultado do terceiro dado.*

Análise geral. Ao contrário de todos os exemplos anteriores, apresentamos aqui apenas a solução correta, já que este é um problema mais complexo. Mas veja que pode surgir, novamente, o mesmo tipo de dúvida sobre qual espaço amostral deve ser adotado. Em verdade, há mais de uma possibilidade para a escolha do espaço amostral, e o importante é entender que algumas dessas escolhas implicam em espaços não equiprováveis. Frisamos ainda que, por si só, a escolha de um espaço amostral não equiprovável não implica que a resposta estará errada; implica apenas que o cálculo da probabilidade não poderá ser feito apenas dividindo a quantidade de casos favoráveis pelo número de elementos no espaço amostral. □

Solução correta. A fim de obter um espaço equiprovável, vamos considerar o espaço amostral como o conjunto de todas as 6^3 triplas ordenadas, (a, b, c), onde a é o valor obtido no primeiro dado, b é valor do segundo e c é o valor do terceiro.

Para esse espaço, basta contar de quantas formas um dos números pode ser igual à soma dos outros dois e dividir o valor obtido por 6^3. Veja que há 3 possibilidades:

$$a + b = c, \qquad a + c = b, \qquad b + c = a. \tag{6}$$

Essas possibilidades são mutualmente excludentes (por exemplo, se vale que $a + b = c$, então $c > b$ e não pode acontecer que $a + c = b$, pois os números são estritamente positivos). Ademais, por simetria, o número de casos em que cada equação é satisfeita é o mesmo. Assim, basta contar de quantas formas pode acontecer que $a + b = c$ e multiplicar o resultado por 3.

Consideramos os possíveis valores de c, variando-o de 1 até 6. Não é possível que c seja igual a 1, pois a e b também valem pelo menos 1. Quando $c = 2$, há apenas uma possibilidade: $(a, b) = (1,1)$, ou seja, $1 + 1 = 2$. Quando $c = 3$, há duas possibilidades para (a, b), que correspondem a $1 + 2 = 3$ e $2 + 1 = 3$. Quando $c = 4$, temos três possibilidades: $1 + 3 = 4$, $2 + 2 = 4$ e $3 + 1 = 4$. De forma semelhante, quando $c = 5$ temos quatro possibilidade e quando $c = 6$ temos cinco possibilidades.

Ao todo, o número de possibilidades para (a, b, c), já considerando os três casos de (6) é:

$$3(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 45.$$

Assim, a probabilidade desejada é $\frac{45}{6^3} = \frac{5}{24}$. $\square$

Dicas para o Professor

Este módulo complementa os módulos anteriores sobre contagem e probabilidade. Sugerimos que o conteúdo deste material seja abordado em dois encontros de 50 minutos.

Dúvidas como as que são citadas aqui são muito comuns entre os alunos. Como orientação geral, caso um aluno resolva um problema e encontre um valor numérico diferente do gabarito oficial, é importante não apenas aceitar que o número obtido está errado mas também tentar entender qual o erro no raciocínio que levou ao valor errado. Só assim podemos evitar que ele cometa novamente o mesmo erro. Veja também que, quase sempre, problemas de contagem e probabilidade possuem mais de uma solução. Caso haja dúvidas sobre o raciocínio de uma solução, é interessante buscar uma maneira alternativa de resolver o problema, a fim de conferir o valor numérico obtido.

A leitura complementar a seguir traz um bom curso introdutório de probabilidade.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade.* SBM, Rio de Janeiro, 2000.