Material Teórico - Módulo: Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Módulo e Produto Escalar - Parte 2

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta segunda parte, veremos alguns exemplos de como é possível aplicar as operações estudadas na primeira parte à resolução de problemas de geometria.

1 Algumas aplicações da desigualdade triangular

Nesta seção, usaremos a desigualdade triangular para resolver alguns problemas de geometria, alguns dos quais envolvem a busca pelo valor mínimo de uma grandeza.

Exemplo 1. *Demonstre que o comprimento de qualquer lado de um triângulo não é maior do que metade de seu perímetro.*

Prova. O perímetro de um triângulo é a soma dos comprimentos de seus lados. Se os lados de um triângulo ABC medem a, b e c, então o seu perímetro é $p = a+b+c$. A desigualdade triangular afirma que $a < b+c$. Somando a a ambos os membros desta desigualdade, obtemos $2a < a+b+c$, ou seja, $2a < p$. Logo, $a < \frac{p}{2}$. De modo similar, como $b < a+c$ e $c < a+b$, temos que $2b < p$ e $2c < p$, de onde segue que $b < \frac{p}{2}$ e $c < \frac{p}{2}$. $\square$

Observação 2. *A metade do perímetro de um triângulo é denominada de* **semiperímetro** *do triângulo, sendo denotada por s. Logo, o que mostramos acima é que $s-a > 0$, $s-b > 0$ e $s-c > 0$. Essas desigualdades garantem que o produto $s(s-a)(s-b)(s-c)$ é sempre positivo, o que é essencial para que a raiz quadrada $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ seja um número real. Esse número real é exatamente a área do triângulo ABC e essa expressão é conhecida como* **fórmula de Heron**.

Exemplo 3. *Seja M o ponto médio do segmento AB. Mostre que, para qualquer ponto P do espaço, tem-se*

$$\overline{PM} \leq \frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}.$$

Prova. Seja P' o ponto pertencente à reta PM tal que $\overline{P'M} = \overline{PM}$ (veja a Figura 1). O quadrilátero $AP'BP$ é um paralelogramo, pois suas diagonais se encontram nos respectivos pontos médios. Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo PAP', obtemos

$$2\overline{PM} = \overline{PP'} \leq \overline{PA} + \overline{P'B} = \overline{PA} + \overline{PB},$$

e disso segue a desigualdade procurada. $\square$

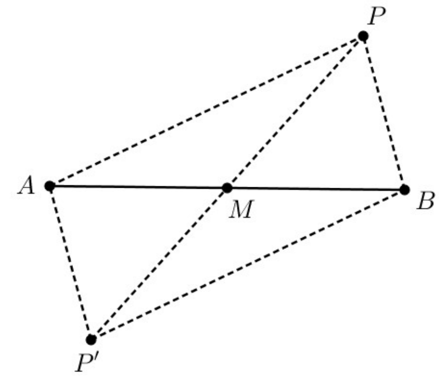

Figura 1: a distância entre P e M é no máximo igual à média aritmética das distâncias de P aos extremos A e B do segmento.

O problema a seguir foi proposto pelo matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) em uma carta ao matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), que o resolveu. Em 1659, a solução de Torricelli foi publicada por Viviani, um de seus alunos.

Exemplo 4 (Problema de Fermat-Torricelli)**.** *ABC é um triângulo com ângulos menores que $120°$. Encontre todos os pontos P no interior de ABC, tais que a soma $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ seja mínima.*

Prova. Suponhamos fixada uma das distâncias, digamos, $\overline{PA} = r$. Neste caso, ponto P pertence ao círculo de centro A e raio r. Dentre todos os pontos desse círculo, vamos procurar aquele tal que a soma $\overline{PB}+\overline{PC}$ seja a menor possível (figura 2).

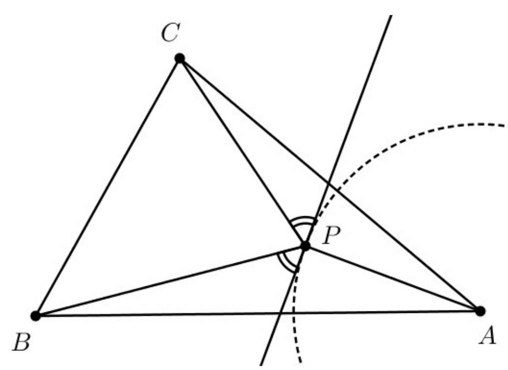

Figura 2: ponto sobre o círculo de centro A e raio $\overline{PA}$ que minimiza a soma $\overline{PB}+\overline{PC}$.

De acordo com o Exemplo 1 da parte 1 desta aula, o ponto P tal que a soma $\overline{PB}+\overline{PC}$ seja mínima pode ser obtido considerando-se o ponto C', tal que B, P e C' são colineares e a reta t, tangente ao círculo no ponto P, é a mediatriz do segmento CC' (veja a figura 3). Nessa figura, temos $\alpha = \gamma$, pois são ângulos opostos pelo vértice, e $\gamma = \beta$ pois são ângulos internos correspondentes em dois triângulos congruentes. Assim, $\alpha = \beta$, ou seja, os ângulos que os segmentos PC e PB formam com a reta tangente ao círculo na figura 2 são iguais.

Agora, a soma $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\frac{1}{2}(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PC}+\overline{PA})$ é mínima se, e somente se, as somas $\overline{PA}+\overline{PB}$, $\overline{PB}+\overline{PC}$ e $\overline{PC}+\overline{PA}$ são mínimas.

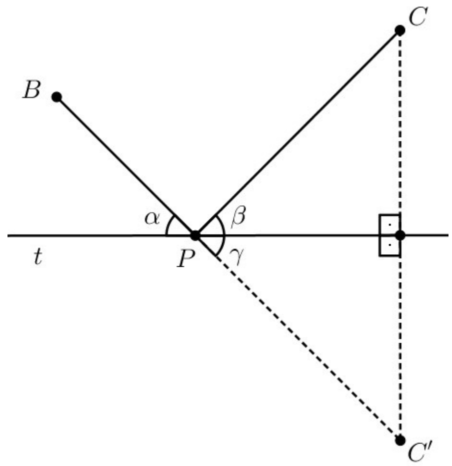

Figura 3: os ângulos α, β e γ são iguais.

Supondo que essas três somas sejam mínimas, obtemos a configuração da figura 4. Nela, P é o ponto de encontro dos três segmentos que partem dos pontos A, B e C. (Não marcamos o ponto P na figura para que a mesma não fique sobrecarregada.)

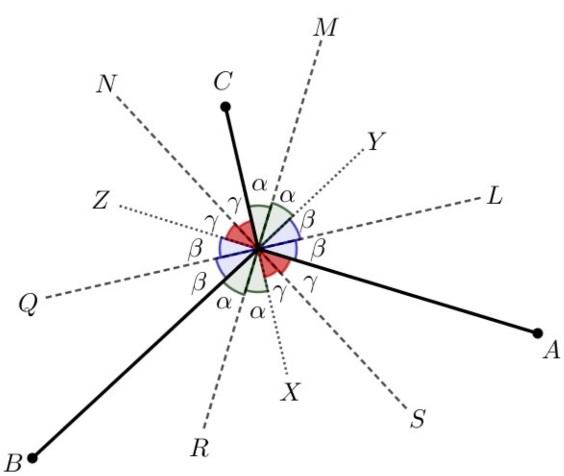

Figura 4: configuração que soluciona o problema.

A reta MR é perpendicular ao segmento PA, pois é a reta tangente ao círculo de centro A e raio $\overline{PA}$. Analogamente, NS é perpendicular a PB e LQ é perpendicular a PC.

Por outro lado, de acordo com os argumentos apresentados nos parágrafos anteriores, os ângulos $\angle MPC$ e $\angle RPB$ são congruentes, com medida igual a α, pois essa igualdade é condição necessária e suficiente para minimizar a soma $\overline{BP}+\overline{PC}$. O mesmo argumento se aplica às somas $\overline{AP}+\overline{PC}$ e $\overline{AP}+\overline{PB}$, que serão mínimas se, e somente se, $\angle APS \equiv \angle CPN$ e $\angle APL \equiv \angle BPQ$, respectivamente.

Chamando de γ e β as medidas desses ângulos, vemos que $4\alpha+4\beta+4\gamma=360°$, logo $\alpha+\beta+\gamma=90°$. Além disso, como $\angle XPL$ e $\angle XPQ$ medem $90°$, temos que $\beta+2\gamma=90°$ e $\beta+2\alpha=90°$, logo $\alpha=\gamma$. Da mesma forma, como $\angle BPN$ e $\angle BPS$ medem $90°$, temos $\gamma+2\beta=\gamma+2\alpha$, logo $\alpha=\beta$.

Portanto, $\alpha=\beta=\gamma=30°$, donde segue que a configuração que resolve o problema é aquela em que $\angle APB \equiv \angle BPC \equiv \angle CPA$, todos medindo $120°$. $\square$

Observação 5. *Ainda em relação ao exemplo anterior, no caso em que um dos ângulos internos do triângulo ABC tem medida maior ou igual a $120°$, pode ser mostrado que o vértice correspondente a esse ângulo é a solução do problema.*

2 Exercícios envolvendo o conceito de produto interno

Exemplo 6. *Encontre o maior e o menor valores possíveis da expressão $x+2y-z$, para (x,y,z) pertencente à esfera de raio 1 centrada na origem. Em que pontos da esfera esses valores máximo e mínimo são atingidos?*

Solução. A expressão $x+2y-z$ é igual ao produto escalar dos vetores (x,y,z) e $(1,2,-1)$. Portanto, pela desigualdade de Cauchy, temos

$$|x+2y-z| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.$$

Mas, como (x,y,z) pertence à esfera de raio 1 centrada na origem, segue que $x^2+y^2+z^2=1$. Assim,

$$|x+2y-z| \le \sqrt{6},$$

isto é, $-\sqrt{6} \le x+2y-z \le \sqrt{6}$, para qualquer (x,y,z) pertencente à esfera de raio 1 centrada na origem.

Para que os valores $\sqrt{6}$ e $-\sqrt{6}$ sejam respectivamente o maior e o menor valores possíveis, precisamos mostrar que eles podem ser efetivamente atingidos. Ora, isso sucede quando ocorre a igualdade na desigualdade de Cauchy; por sua vez, conforme discutimos na página 4 da parte 1, tal igualdade ocorre se, e somente se, os vetores (x,y,z) e $(1,2,-1)$ forem paralelos, ou seja,

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}=t,$$

para algum $t\in\mathbb{R}$. Logo, os pontos onde a expressão $x+2y-z$ atinge seus valores extremos são as interseções da esfera de raio 1 com a reta de equações paramétricas $x = t$, $y = 2t$ e $z = -t$.

Por fim, para um ponto (x, y, z) sobre a esfera de raio 1 centrada na origem satisfaça as igualdades $x = t$, $y = 2t$ e $z = -t$, devemos ter

$$t^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 1,$$

isto é, $6t^2 = 1$. Logo, $t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$, o que nos dá os pontos $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. No primeiro deles, a expressão $x + 2y - z$ atinge o valor máximo, $\sqrt{6}$, ao passo que no segundo ela atinge seu valor mínimo, $-\sqrt{6}$. □

Exemplo 7. *Sejam A, B, C e D quatro pontos no espaço. Mostre que*

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}. \quad (1)$$

Prova. Denotando por S o lado esquerdo da igualdade enunciada e utilizando as propriedades do produto interno, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} S &= (B - A) \cdot (B - A) + (D - C) \cdot (D - C) \\ &\quad - (B - C) \cdot (B - C) - (A - D) \cdot (A - D) \\ &= 2(B \cdot C + A \cdot D - A \cdot B - C \cdot D) \\ &= 2(C - A) \cdot (B - D) \\ &= 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8. *Mostre que, em um tetraedro $ABCD$, se $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, então*

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2.$$

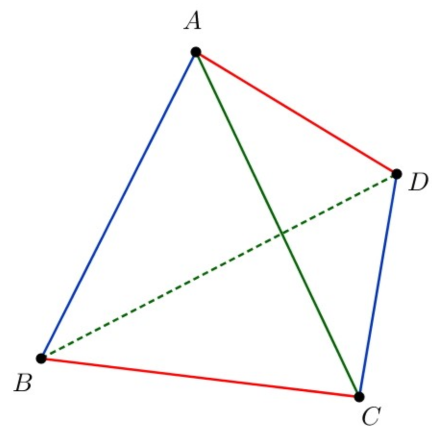

Figura 5: os três pares de arestas opostas de um tetraedro.

Prova. Como $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ implica $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, a expressão (1) fornece diretamente o resultado. □

A igualdade (1) do Exemplo 7 fornece várias relações interessantes, como veremos a seguir.

Exemplo 9. *Mostre o seguinte:*

(a) Em um trapézio $ABCD$, com lados paralelos AC e DB e diagonais AB e CD, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos lados não paralelos, mais duas vezes o produto dos lados paralelos.

(b) Em um paralelogramo, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos quatro lados.

Prova.
(a) Queremos mostrar que

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{DB}|.$$

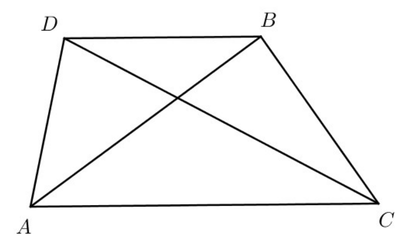

Figura 6: um trapézio e suas diagonais.

Mas isso é exatamente a igualdade em (1), pois, sendo $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DB}$ paralelos, temos

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{DB}| \cos 0 = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{DB}|.$$

(b) No caso do paralelogramo, temos $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

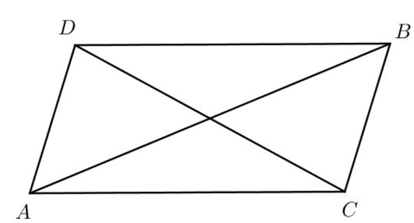

Figura 7: um paralelogramo e suas diagonais.

Logo, a igualdade (1) pode ser reescrita como

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 = 2(|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|).$$

$\square$

Exemplo 10. *Sejam A, B, C e D quatro pontos no espaço. Suponha que, para qualquer ponto P do espaço, vale*

$$\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2. \qquad (2)$$

Mostre que $ABCD$ é um retângulo.

Prova. A relação dada pode ser reescrita como

$$(P - A) \cdot (P - A) + (P - C) \cdot (P - C) =$$

$$= (P - B) \cdot (P - B) + (P - D) \cdot (P - D),$$

ou seja,

$$A \cdot A + C \cdot C - B \cdot B - D \cdot D = 2P \cdot (A + C - B - D). \quad (3)$$

Como estamos supondo que essa igualdade vale para todo ponto P, ela vale em particular, para dois pontos distintos P_1 e P_2. Subtraindo as equações obtidas a partir de (3) fazendo $P = P_1$ e $P = P_2$, obtemos

$$2(P_1 - P_2) \cdot (A + C - B - D) = 0.$$

Agora, uma vez que podemos escolher $P_1 \neq P_2$ arbitrariamente, temos necessariamente $A + C - B - D = 0$, isto é,

$$A + C = B + D. \qquad (4)$$

Por sua vez, essa última relação pode ser reescrita como $A - B = D - C$, o que mostra que o quadrilátero em questão é pelo menos um paralelogramo (pois os lados AB e CD são paralelos e têm a mesma medida).

Substituindo (4) na identidade (3), obtemos

$$A \cdot A + C \cdot C = B \cdot B + D \cdot D \qquad (5)$$

Por outro lado, (4) fornece $(A + C) \cdot (A + C) = (B + D) \cdot (B + D)$, ou seja, $A \cdot A + 2A \cdot C + C \cdot C = B \cdot B + 2B \cdot D + D \cdot D$. Substituindo (5) nessa igualdade, obtemos

$$2A \cdot C = 2B \cdot D. \qquad (6)$$

Por fim, subtraindo (6) de (5), obtemos $(A - C) \cdot (A - C) = (B - D) \cdot (B - D)$, ou seja,

$$|A - C|^2 = |B - D|^2.$$

Assim, as diagonais do paralelogramo $ABCD$ são iguais, o que mostra que $ABCD$ é um retângulo. $\square$

Observação 11. *Vale a recíproca do resultado do Exemplo 10. De fato, se $ABCD$ é um retângulo, então $A + C - B - D = 0$, pois $ABCD$ é um paralelogramo. Por outro lado, escolhendo um sistema de coordenadas no qual $C = 0$, o Teorema de Pitágoras implica $|A|^2 = |B|^2 + |C|^2$, logo $A \cdot A + C \cdot C - B \cdot B - D \cdot D = 0$. Assim, a identidade (3), que é equivalente à identidade (2), é válida, independentemente da escolha de P.*

Exemplo 12. *Sobre os lados de um triângulo ABC, construímos externamente os retângulos $ABDE, BCFG$ e $ACIH$. Mostre que as mediatrizes dos segmentos EH, DG e FI são concorrentes (figura 8).*

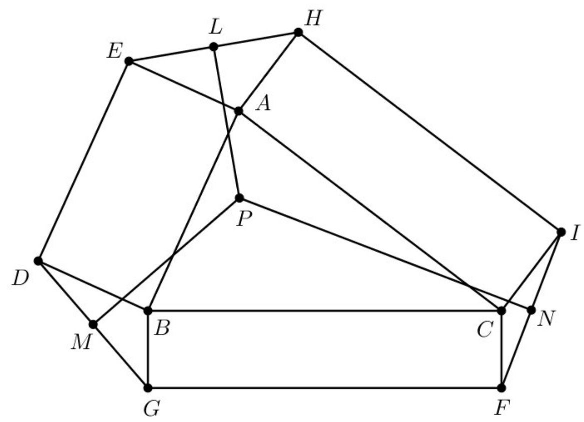

Figura 8: construção do problema 12.

Prova. Seja P o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos DG e IF. Pela Observação 11, temos:

(1) $\overline{PB}^2 + \overline{PE}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PD}^2$,

(2) $\overline{PB}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PG}^2$,

(3) $\overline{PA}^2 + \overline{PI}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PH}^2$.

Por outro lado, a mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos equidistantes aos extremos desse segmento. Por isso, $\overline{PG} = \overline{PD}$ e $\overline{PI} = \overline{PF}$. Assim,

$$\begin{aligned} \overline{PE}^2 &= \overline{PA}^2 + \overline{PD}^2 - \overline{PB}^2 \\ &= \overline{PA}^2 + \overline{PG}^2 - \overline{PB}^2 \\ &= \overline{PA}^2 + \overline{PF}^2 - \overline{PC}^2 \\ &= \overline{PA}^2 + \overline{PI}^2 - \overline{PC}^2 \\ &= \overline{PH}^2, \end{aligned}$$

e disso concluímos que $\overline{PE} = \overline{PH}$, ou seja, o ponto P também pertence à mediatriz do segmento EH. $\square$

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Você pode explorar as desigualdades triangular e de Cauchy para resolver problemas de otimização. Exemplos que ilustram esse tipo de aplicação podem ser encontrados na sugestão de leitura complementar [2].

O problema de Fermat-Torricelli é por vezes chamado de problema de Steiner (Jacob Steiner, 1796-1863), como por exemplo, na sugestão de leitura complementar [2], capítulo 7, e [5], capítulo VII. Na primeira de tais referências, uma solução do problema de Fermat-Torricelli distinta da que mostramos aqui é apresentada; na segunda, você poderá encontrar outros problemas interessantes cuja solução se relaciona, de algum modo, ao uso da desigualdade triangular.

Sugestões de Leitura Complementar

1. J. L. M. Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana.* Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol.1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol.2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.
4. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
5. Courant, R., Robbins, H., *O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2000.