

**Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas**

**Noções Básicas - Parte 2**

**Nono Ano - Fundamental**

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**

**Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**07 de Dezembro de 2024**



**PORTAL DA  
MATEMÁTICA**  
OBMEP

Neste material, discutimos três tipos de *atributos* que uma função pode ter e que, por sua importância, merecem destaque. Ao longo da discussão, apresentamos vários exemplos para ilustrar os conceitos introduzidos.

## 1 Funções injetivas

**Definição 1** (função injetiva). *Uma função  $f : A \rightarrow B$  é injetiva, ou injetora, se quaisquer dois elementos diferentes do domínio estiverem associados a elementos diferentes do contradomínio. Em símbolos, para todos  $x, x' \in A$  devemos ter que*

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'). \quad (1)$$

Vamos observar alguns dos exemplos anteriores, avaliando quais das funções são injetivas.

**Exemplo 2.** *No Exemplo 1 da Parte 1, assumamos que a idade foi medida em anos e a altura em centímetros, e o intervalo de tempo foram, por exemplo, de 0 a 8 anos. Suponha, ainda, que a tabela a seguir registre as alturas para a criança em questão:*

Idade (anos)	Altura (cm)
0	48
1	73
2	86
3	95
4	102
5	108
6	113
7	119
8	125

*Como idades diferentes correspondem a alturas diferentes, a função  $f$ , dada pela tabela acima, que associa a cada idade a altura de nossa criança, é injetiva.*

**Exemplo 3.** Observando a tabela do Exemplo 2 da Parte 1, vemos que altitudes diferentes correspondem a pressões atmosféricas diferentes. Logo, a função que fornece a pressão atmosférica para cada altura também é injetiva.

**Exemplo 4.** No Exemplo 5 da Parte 1, a função deixa de ser injetiva se uma casa receber mais de uma carta. Por outro lado, se cada casa receber no máximo uma carta, a função é injetiva.

**Exemplo 5.** No Exemplo 6 da Parte 1, a função deixa de ser injetiva se dois alunos sentarem em uma mesma cadeira. Caso alunos diferentes sentem em cadeiras diferentes, a função será injetiva.

Em termos de diagramas de setas, o fato de uma função  $f : A \rightarrow B$  ser injetiva significa que setas que partem de elementos diferentes de  $A$  chegam em elementos diferentes de  $B$ .

Para uma função  $f : A \rightarrow B$ , a validade da implicação (1) para todos  $x, x' \in A$  equivale à validade, para todos  $x, x' \in A$ , da implicação

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'. \quad (2)$$

Quando  $f : A \rightarrow B$  for uma função real de variável real, (2) é um modo eficiente de verificar se  $f$  é injetora. Aqui, a estratégia é, partindo da igualdade  $f(x) = f(x')$ , usar a fórmula que define  $f$  para deduzir que  $x = x'$ . Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 6.** Mostre que toda função afim é injetiva.

**Prova.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Então,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow ax + b = ax' + b \Rightarrow ax = ax';$$

multiplicando ambos os membros por  $\frac{1}{a}$ , obtemos  $x = x'$ . Logo,  $f$  é injetiva.  $\square$

**Exemplo 7.** A função de proporcionalidade inversa é a função  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  dada por  $f(x) = \frac{1}{x}$ , para todo  $x > 0$ . Mostre que ela é injetiva.

**Prova.** Para  $x, x' > 0$ , temos que

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \Rightarrow x = x'.$$

□

**Exemplo 8.** Seja  $f : [\frac{1}{4}, +\infty)$  a função dada por  $f(x) = 2x^2 - x + 5$ . Mostre que  $f$  é injetiva.

**Prova.** Para  $x_1, x_2 \in [\frac{1}{4}, +\infty)$ , temos que

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2x_1^2 - x_1 + 5 = 2x_2^2 - x_2 + 5 \\ &\Rightarrow 2x_1^2 - x_1 = 2x_2^2 - x_2 \\ &\Rightarrow 2(x_1^2 - x_2^2) - (x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(2(x_1 + x_2) - 1) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \text{ ou } 2(x_1 + x_2) - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 + x_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Se o primeiro caso ocorrer, teremos chegado à conclusão que queríamos; se o segundo caso ocorrer, então, uma vez que  $x_1, x_2 \in [\frac{1}{4}, +\infty)$ , teremos

$$\frac{1}{2} = x_1 + x_2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

portanto,  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ . Assim, em qualquer caso, partindo de  $f(x_1) = f(x_2)$ , deduzimos que  $x_1 = x_2$ ; logo,  $f$  é injetiva.

□

**Exemplo 9.** Mostre que a função  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x - \frac{1}{x}$  é injetiva.

**Prova.** Tome  $x_1, x_2 > 0$ .

$$\begin{aligned}f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1 - \frac{1}{x_1} = x_2 - \frac{1}{x_2} \\&\Rightarrow x_1 - x_2 - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0 \\&\Rightarrow x_1 - x_2 + \frac{-x_2 + x_1}{x_1 x_2} = 0 \\&\Rightarrow (x_1 - x_2) \left(1 + \frac{1}{x_1 x_2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Como  $1 + \frac{1}{x_1 x_2} > 0$ , concluímos que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

□

**Exemplo 10.** Mostre que a função  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  dada por  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  não é injetiva.

**Prova.** Basta ver que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} + 2 = f(2).$$

□

## 2 Funções sobrejetivas

**Definição 11.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é **sobrejetiva**, ou **sobrejetora**, se a sua imagem for igual a seu contradomínio, isto é, se cada elemento  $y \in B$  for a imagem de algum elemento  $x \in A$ .

**Exemplo 12.** No Exemplo 5 da Parte 1, se cada casa de  $B$  receber pelo menos uma carta, então a função  $f : A \rightarrow B$  é sobrejetiva. Se alguma casa do conjunto  $B$  não receber cartas, então a função  $f : A \rightarrow B$  não é sobrejetiva.

**Exemplo 13.** No Exemplo 6 da Parte 1, se uma cadeira da sala de aula estiver vazia, então a função  $f$  não será sobrejetiva, pois essa cadeira pertencerá ao contradomínio mas não pertencerá à imagem. A imagem é formada pelas cadeiras onde há algum aluno sentado.

Em termos de diagramas de setas, o fato de uma função  $f : A \rightarrow B$  ser sobrejetiva significa que *todo elemento de  $B$  recebe pelo menos uma seta*.

Quando  $f : A \rightarrow B$  for uma função real de variável real, para verificar se  $f$  é sobrejetora temos de escolher arbitrariamente um elemento  $y \in B$  e verificar se existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Isso, em geral, se resume a *resolver uma equação*.

**Exemplo 14.** Mostre que toda função afim é sobrejetiva.

**Prova.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Dado  $y \in \mathbb{R}$ , temos

$$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow ax = y - b \Leftrightarrow x = \frac{y - b}{a}.$$

Então,  $x = \frac{y-b}{a}$  é um elemento do domínio de  $f$  tal que  $f(x) = y$ , logo,  $f$  é sobrejetiva.  $\square$

**Exemplo 15.** Mostre que a função de proporcionalidade inversa,  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  dada para  $x > 0$  por  $f(x) = \frac{1}{x}$ , é sobrejetiva.

**Prova.** Para  $y > 0$ , temos que

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}.$$

Como  $\frac{1}{y} > 0$ , segue que  $x = \frac{1}{y}$  é um elemento do domínio de  $f$  tal que  $f(x) = y$ ; logo,  $f$  é sobrejetiva.  $\square$

**Exemplo 16.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{39}{8}, +\infty\right)$  a função dada por  $f(x) = 2x^2 - x + 5$ . Mostre que  $f$  é sobrejetiva.

**Prova.** Para  $y \in \left[\frac{39}{8}, +\infty\right)$ , temos de encontrar  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$ , isto é,  $2x^2 - x + 5 = y$ . Ora, a fórmula de Baskara dá

$$\begin{aligned}2x^2 - x + 5 = y &\Leftrightarrow 2x^2 - x + (5 - y) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2(5 - y)}}{2 \cdot 2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{8y - 39}}{4}.\end{aligned}$$

Como  $y \geq \frac{39}{8}$  equivale a  $8y - 39 \geq 0$ , a raiz quadrada acima tem sentido nos reais e, daí, os números reais  $x$  dados pela igualdade  $x = \frac{1 \pm \sqrt{8y - 39}}{4}$  são tais que  $f(x) = y$ . Então,  $f$  é sobrejetiva.  $\square$

**Exemplo 17.** Mostre que a função  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x - \frac{1}{x}$  é sobrejetiva.

**Prova.** Dado  $y \in \mathbb{R}$  precisamos encontrar  $x > 0$  tal que  $f(x) = y$ . Mas

$$f(x) = y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = yx \Leftrightarrow x^2 - yx - 1 = 0.$$

Essa equação de segundo grau (em  $x$ ) tem

$$\Delta = (-y)^2 - 4(-1) = y^2 + 4 > 0,$$

logo, tem duas raízes reais. Como o produto dessas raízes é  $-1$ , uma delas é positiva. Então, quando  $x$  é igual a essa raiz positiva, temos  $f(x) = y$ .  $\square$

**Exemplo 18.** Mostre que a função  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  dada por  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  não é sobrejetiva.

**Prova.** Note que  $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$ , para todo  $x > 0$ ; realmente, para  $x > 0$ , temos

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x - 1)^2}{x} \geq 0.$$

Portanto, nenhum real  $y$  tal que  $0 < y < 2$  pertence à imagem de  $f$ .  $\square$

### 3 Funções bijetivas

Esta seção lida com as funções que são simultaneamente injetoras e bijetoras. A definição relevante é a que segue.

**Definição 19.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é **bijetiva** ou **bijetora** se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Uma vez que ser bijetora é ser ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, podemos revisitar facilmente os exemplos das duas seções anteriores, verificando, em cada caso, se a função em questão é bijetora.

**Exemplo 20.** Novamente no Exemplo 6 da parte 1, se o número de alunos for igual ao número de cadeiras e cada aluno estiver sentado em uma cadeira, então a função que associa cada aluno à cadeira na qual ele está sentado é bijetiva.

**Exemplo 21.** Toda função afim, sendo simultaneamente injetora e sobrejetiva, é bijetora.

**Exemplo 22.** A função de proporcionalidade inversa,  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  dada para  $x > 0$  por  $f(x) = \frac{1}{x}$ , é injetora e sobrejetiva, logo, bijetora.

**Exemplo 23.** Se  $f : [\frac{1}{4}, +\infty) \rightarrow [\frac{39}{8}, +\infty)$  é a função dada por  $f(x) = 2x^2 - x + 5$ , então  $f$  é bijetora.

**Exemplo 24.** A função  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada para  $x > 0$  por  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ , é bijetiva.

**Exemplo 25.** Mostre que a função  $f : [1, +\infty) \rightarrow [2, +\infty)$  dada por  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  é bijetiva.

**Prova.** Para a injetividade, calculando como no Exemplo 24, chegamos a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 x_2 = 1. \end{aligned}$$



Como  $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) = [1, +\infty)$ , temos  $x_1 x_2 \geq 1 \cdot 1 = 1$ , com  $x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1, x_2 = 1$ ; em particular,  $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ . Assim, em qualquer caso,  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Para a sobrejetividade, argumentamos como no Exemplo 17: dado  $y \geq 2$  precisamos encontrar  $x \geq 1$  tal que  $f(x) = y$ . Mas

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = yx \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0.$$

Essa equação de segundo grau (em  $x$ ) tem

$$\Delta = (-y)^2 - 4 = y^2 - 4 \geq 0,$$

uma vez que  $y \geq 2$ . Portanto, ela tem duas raízes reais (possivelmente iguais). Como a soma  $y$  e o produto 1 dessas raízes são números positivos, ambas são positivas. Como o produto é 1, não pode acontecer das duas raízes serem menores que 1. Então, pelo menos uma raiz é maior ou igual a 1, logo, pertence ao domínio de  $f$ . Por fim, quando  $x$  é igual a essa raiz maior ou igual a 1, temos  $f(x) = y$ .  $\square$

Se  $A$  e  $B$  forem conjuntos *finitos*, é possível mostrar que existe uma função bijetiva  $f : A \rightarrow B$  se, e só se,  $A$  e  $B$  tiverem um mesmo número de elementos. O próximo exemplo mostra que, quando  $A$  e  $B$  forem *infinitos*, pode existir uma função bijetiva  $f : A \rightarrow B$  mesmo que  $B$  seja um subconjunto próprio de  $A$  (ou vice-versa).

**Exemplo 26.** *Seja  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números naturais, e  $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$  o conjunto dos números naturais pares. É claro que  $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ . Por outro lado, a função  $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$  dada por  $f(n) = 2n$  é bijetiva.*

**Prova.** Realmente, se  $a$  e  $b$  são números naturais distintos, então os seus dobros também são distintos, ou seja, se  $a \neq b$ , então  $2a \neq 2b$ . Logo, a função  $f$  é injetiva. Além disso, se  $n$  é um número natural par, então, por definição,  $n/2$  é um número natural, de forma que  $n = 2 \cdot \frac{n}{2} = f(n/2)$ . Logo,  $f$  é sobrejetiva.  $\square$

Ainda a propósito da demonstração do exemplo anterior, observe que a igualdade  $n = 2 \cdot \frac{n}{2}$  sempre é válida; contudo, só pudemos escrever  $2 \cdot \frac{n}{2} = f(n/2)$  porque  $\frac{n}{2}$  pertence ao domínio de  $f$ , isto é, é um número natural.

Terminemos discutindo um exemplo *geométrico*. Para ele, recorde que dois segmentos de reta são chamados *paralelos* se as retas que os contêm forem paralelas.

**Exemplo 27.** *Sejam  $AB$  e  $CD$  dois segmentos de reta paralelos. Então, existe uma função bijetiva  $f : AB \rightarrow CD$  que leva cada ponto do segmento  $AB$  em um ponto do segmento  $CD$ .*

**Prova.** Vamos supor, de início, que os segmentos  $AB$  e  $CD$  não têm um mesmo tamanho. Sendo esse o caso, as semirretas  $CA$  e  $DB$  intersectam-se no ponto  $O$  (veja a figura 3).

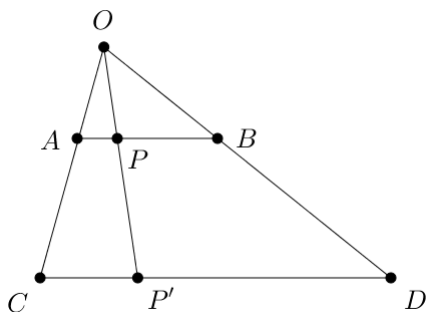


Figura 1: uma função bijetiva de  $AB$  em  $CD$ .

Considere a semirreta  $OP$ , determinada pelo ponto  $O$  e por um ponto  $P$  do segmento  $AB$ . Essa semirreta intersecta o segmento  $CD$  em um ponto  $P'$  (veja novamente a Figura 3). Considere a função  $f : AB \rightarrow CD$  que associa cada ponto  $P \in AB$  ao ponto  $P' \in CD$ , obtido como acima.

A função definida acima é injetiva, porque pontos  $P, Q \in AB$  distintos determinam semirretas  $OP$  e  $OQ$  distintas; logo, as interseções de  $OP$  e  $OQ$  com  $CD$  também devem ser distintas, pois se fossem iguais, as duas semirretas teriam dois pontos em comum e, portanto, seriam elas mesmas iguais.

A função  $f$  também é sobrejetiva, porque cada ponto  $P' \in CD$  determina uma única semirreta  $OP'$ , que intersecta  $AB$  em um ponto  $P$ . Pela construção da função,  $f(P) = P'$ .

No caso em que  $AB$  e  $CD$  têm um mesmo comprimento e o sentido de  $A$  para  $B$  coincide com aquele de  $C$  para  $D$ , a Geometria Euclidiana ensina que as semirretas  $CA$  e  $DB$  são *paralelas*. Então, definimos a função  $f$  do seguinte modo: dado  $P \in AB$  seja  $\ell$  a reta que passa por  $P$  e é paralela à semirreta  $CA$  e, portanto, também é paralela à semirreta  $DB$ . Estabeleça a imagem de  $P$  por  $f$  como sendo o ponto de interseção de  $\ell$  com  $CD$ . Os argumentos que usamos acima podem ser repetidos para este caso (convidamos o leitor a fazê-lo), mostrando que a função assim obtida também é bijetiva.  $\square$

Observamos que o resultado do exemplo anterior continua válido mesmo quando  $AB$  e  $CD$  não forem paralelos. Para isso, é necessário reposicionar um dos segmentos de modo que eles passem a ser paralelos, mostrar que esse reposicionamento é uma função bijetiva e considerar a ação simultânea das duas funções. Explicaremos com mais detalhe o que ocorre nesse caso ao estudarmos o conceito de *composição* de funções.

## Dicas para o Professor

Dois ou três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir este material.

Os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora são difíceis de assimilar de início, especialmente porque os estudantes tendem a confundir as restrições impostas por cada

um deles. Por outro lado, eles são imprescindíveis ao estudo de funções invertíveis, de forma que é bastante importante que os alunos os dominem. Nesse sentido, uma estratégia interessante é discutir mais exemplos em sala, os quais podem ser colhidos das referências a seguir.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, Volume 3, terceira edição. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2022.