

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivada como Função

Exercícios - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

08 de Janeiro de 2024



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Continuaremos apresentando exemplos relacionados ao material estudado nesse módulo. Desta feita, consideraremos problemas envolvendo a noção de convexidade e a desigualdade de Jensen.

Exemplo 1 (USAMO - 2000, Problema 1). *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é muito convexa se*

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|, \quad (1)$$

para quaisquer números reais x e y . Prove que não existe nenhuma função muito convexa.

Solução. Digamos que f seja uma função muito convexa. Defina $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ pela regra $g(x) = (f(x) - f(0))/x$. Em termos geométricos, g é a inclinação da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(0, f(0))$ e $(x, f(x))$. Vejamos que

$$g(x) \geq g(-x) + 4, \quad \forall x > 0. \quad (2)$$

Com efeito, essa desigualdade se escreve como

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{f(0) - f(-x)}{x} + 4$$

ou ainda,

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} \geq f(0) + 2x,$$

que nada mais é do que (1), ao se fazer $y = -x$.

Por outro lado, para $y = 0$, a relação (1) toma a forma

$$\frac{f(x) + f(0)}{2} \geq f(x/2) + |x|,$$

ou melhor,

$$\frac{f(x) - f(0)}{2} \geq (f(x/2) - f(0)) + |x|.$$

(Subtraia $f(0)$ de ambos membros). Se dividirmos cada membro da desigualdade anterior por $x/2$, chegaremos às inequações

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{f(x/2) - f(0)}{x/2} + 2, \quad \forall x > 0,$$

e

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \frac{f(x/2) - f(0)}{x/2} - 2, \quad \forall x < 0.$$

Portanto, vale

$$g(x) \geq g(x/2) + 2 \quad \text{e} \quad g(-x) \leq g(-x/2) - 2,$$

para cada número real positivo x . Daí, segue que

$$g(x) - g(-x) \geq g(x/2) - g(-x/2) + 4,$$

para todo $x > 0$. Assim, fica fácil, por indução matemática, estabelecer a seguinte desigualdade:

$$g(x) \geq g(-x) + 4n, \tag{3}$$

para quaisquer $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. De fato, a base de indução consiste da relação (2), enquanto o passo de indução (admitindo a validade de (3) para um certo natural n) segue de

$$\begin{aligned} g(x) - g(-x) &\geq g(x/2) - g(-x/2) + 4 \\ &\geq 4n + 4 = 4(n + 1), \end{aligned}$$

em que a hipótese de indução foi utilizada com $x/2$ e $-x/2$ no lugar de x e $-x$, respectivamente.

Porém, é evidente que (3) gera uma contradição ao se fazer $n \rightarrow \infty$ (com $x > 0$ fixado), qual seja, $g(x) = +\infty$.

Desse modo, funções muito convexas não podem existir. \square

Para o próximo exemplo, convém relembrar a seguinte propriedade característica das funções convexas (vide seção 3 da aula anterior): se AB e BX são cordas consecutivas do gráfico de uma função convexa (estando o ponto A “mais

à esquerda”), a inclinação m_{ab} da reta \overleftrightarrow{AB} não supera a inclinação m_{bx} da reta \overleftrightarrow{BX} .

Em símbolos, se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e $a < b < x$ são pontos de I , então

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}. \quad (4)$$

Exemplo 2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se f não for constante, prove que*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Solução. Como f não é constante, existem números $a < b$ tais que $f(a) \neq f(b)$. Se ocorrer $f(a) < f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$), provaremos que $f(x)$ tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Com efeito, seja g a função afim cujo gráfico é a reta passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Logo,

$$g(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

Pela desigualdade (4), vale

$$g(x) \leq f(b) + \frac{f(x) - f(b)}{x - b}(x - b) = f(x),$$

para cada número real $x > b$. Dessa relação e do fato de que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (+\infty) = +\infty,$$

segue imediatamente a igualdade

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

□

Observação 3. O exemplo anterior admite a seguinte formulação para funções côncavas: se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função côncava não constante, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

A justificativa é imediata, bastando lembrar que f é côncava se, e só se, $-f$ é convexa.

Exemplo 4 (IMC - 2020, Problema 5). Determine todas as funções duas vezes deriváveis $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ satisfazendo a desigualdade

$$f''(x)f(x) \geq 2f'(x)^2, \quad (5)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Seja f uma função satisfazendo as hipóteses do problema. Afirmamos que $g := 1/f$ é uma função côncava. De fato, pelos resultados da aula passada, basta provar que $g''(x) \leq 0$, para cada número real x . Pela regra do quociente,

$$g'(x) = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f(x)^2} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

enquanto

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{f''(x)f(x)^2 - f'(x)(2f'(x)f(x))}{f(x)^4} \\ &= -\frac{f''(x)f(x) - 2[f'(x)]^2}{f(x)^3} \leq 0, \end{aligned}$$

por (5) e pela positividade de f .

Agora, de acordo com a observação 3, ou g é constante ou g deve assumir valores negativos. Como $g = 1/f$ é positiva, segue que g é constante e, com maior razão, f também o é.

Por fim, como toda função constante positiva satisfaz as condições do enunciado, concluímos que as únicas funções duas vezes deriváveis $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ cumprindo a condição (5) são as constantes positivas. \square

Exemplo 5. *Sejam a_1, a_2, \dots, a_n números reais positivos cuja soma é uma constante S . Determine, em função de S , o valor mínimo da expressão*

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}.$$

Solução. Considere a função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \ln x$. Um cálculo simples, com o auxílio da regra do produto, dá $f''(x) = 1/x > 0$, para todo $x > 0$. Pelo corolário 8 da aula anterior, f é estritamente convexa. Pela desigualdade de Jensen, podemos escrever

$$\frac{S}{n} \cdot \ln \left(\frac{S}{n} \right) \leq \frac{a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n}{n},$$

ou seja,

$$\frac{\ln(S/n)^S}{n} \leq \frac{\ln a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}{n},$$

de forma que

$$(S/n)^S \leq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}.$$

Como a igualdade na desigualdade anterior ocorre quando (e somente quando) $a_1 = \dots = a_n$, concluímos que o valor mínimo da expressão $a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}$ é $(S/n)^S$. \square

Exemplo 6 (A desigualdade de Nesbitt). *Se a, b e c são números reais positivos, mostre que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a = b = c$.

Solução. Considere a função $\varphi : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = x/(1-x)$. Vejamos que φ é estritamente convexa.

As derivadas de φ podem ser calculadas utilizando a regra do quociente:

$$\varphi'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Observando que φ' é crescente, já obtemos a conclusão desejada (pelo teorema 6 da aula passada). Alternativamente, poderíamos calcular

$$\varphi''(x) = \frac{0 \cdot (1-x)^2 - 1 \cdot (2x-2)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3},$$

e notar que $\varphi''(x) > 0$, para todo $x < 1$.

Agora sejam

$$x_1 = \frac{a}{a+b+c}, \quad x_2 = \frac{b}{a+b+c}, \quad x_3 = \frac{c}{a+b+c},$$

de maneira que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ e

$$\varphi(x_1) = \frac{a}{b+c}, \quad \varphi(x_2) = \frac{b}{a+c}, \quad \varphi(x_3) = \frac{c}{a+b}.$$

Pelo corolário 14 da aula anterior, temos

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) \\ &= 3 \cdot \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3)}{3} \\ &\geq 3\varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \\ &= 3\varphi(1/3) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Quanto à igualdade, ela ocorre se, e só se, $x_1 = x_2 = x_3$, ou seja, se, e só se, $a = b = c$. \square

De acordo com a aula passada, se x_1, x_2, \dots, x_n forem números reais positivos e t_1, t_2, \dots, t_n formarem um sistema de pesos ¹, dizemos que

$$t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n$$

¹Isto é, cada t_i for não negativo e $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

é a *média aritmética ponderada* dos x'_i 's, com pesos t'_i 's.

Também podemos definir a *média geométrica ponderada* daqueles números, com os respectivos pesos, como a expressão

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}.$$

Quando os pesos forem todos iguais, isto é, $t_1 = \dots = t_n = 1/n$, as médias acima coincidem com as médias aritmética e geométrica previamente estudadas.

Exemplo 7. *Nas notações acima, prove a desigualdade entre as médias ponderadas aritmética e geométrica:*

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n. \quad (6)$$

Além disso, se os pesos t'_i 's forem todos positivos, a igualdade em (6) ocorre se, e só se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Solução. Como sabemos do exemplo 12 da aula anterior, a função logaritmo natural \ln é estritamente côncava. Logo, pelas propriedades da função logaritmo e pela desigualdade de Jensen, temos

$$\begin{aligned} \ln(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}) &= t_1 \ln x_1 + t_2 \ln x_2 + \dots + t_n \ln x_n \\ &\leq \ln(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n). \end{aligned}$$

Como \ln é crescente, segue a desigualdade (6). Ademais, caso os pesos t'_i 's sejam todos positivos, a concavidade estrita de \ln garante, ainda pela desigualdade de Jensen, que a igualdade em (6) ocorre se, e só se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. \square

Exemplo 8. *Sejam x, y, p, q números reais positivos. Se p e q satisfazem a relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, prove a desigualdade de Young:*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

com igualdade se, e só se, $x^p = y^q$.

Solução. Basta aplicar a desigualdade entre as médias ponderadas aos números x^p , y^q , com os pesos $1/p$, $1/q$:

$$xy = (x^p)^{1/p}(y^q)^{1/q} \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

□

Exemplo 9 (IMO - 2020, Problema 2). *Os números reais a , b , c , d são tais que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $a + b + c + d = 1$. Prove que*

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1. \quad (7)$$

Solução. Como a , b , c , d formam um sistema de pesos, a desigualdade entre as médias ponderadas implica

$$a^a b^b c^c d^d \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Assim, basta provar que

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1 = (a + b + c + d)^3. \quad (8)$$

Mantendo em mente as desigualdades $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $b^2 + c^2 + d^2 < (b + c + d)^2$, temos

$$\begin{aligned} & (a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq \\ & \leq [a + 3(b + c + d)][a^2 + (b^2 + c^2 + d^2)] \\ & = a^3 + 3a^2(b + c + d) + a(b^2 + c^2 + d^2) \\ & \quad + 3(b + c + d)(b^2 + c^2 + d^2) \\ & < a^3 + 3a^2(b + c + d) + a(b + c + d)^2 \\ & \quad + 3(b + c + d)(b^2 + c^2 + d^2) \\ & = a^3 + 3a^2(b + c + d) \\ & \quad + (b + c + d)[a(b + c + d) + 3(b^2 + c^2 + d^2)]. \end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^3 &= [a + (b + c + d)]^3 \\ &= a^3 + 3a^2(b + c + d) + \\ & \quad + 3a(b + c + d)^2 + (b + c + d)^3, \end{aligned}$$

é suficiente provar que

$$\begin{aligned} & (b + c + d)[a(b + c + d) + 3(b^2 + c^2 + d^2)] \leq \\ & \leq 3a(b + c + d)^2 + (b + c + d)^3, \end{aligned}$$

ou, ainda, que

$$\begin{aligned} & a(b + c + d) + 3(b^2 + c^2 + d^2) \leq \\ & \leq 3a(b + c + d) + (b + c + d)^2. \end{aligned}$$

Para o que falta, utilizando uma vez mais que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $b^2 + c^2 + d^2 < (b + c + d)^2$, obtemos

$$\begin{aligned} & a(b + c + d) + 3(b^2 + c^2 + d^2) = \\ & = [a(b + c + d) + 2(b^2 + c^2 + d^2)] + (b^2 + c^2 + d^2) \\ & < [a(b + c + d) + 2(ab + ac + ad)] + (b + c + d)^2 \\ & = 3a(b + c + d) + (b + c + d)^2, \end{aligned}$$

conforme desejado. \square

Dicas para o Professor

O leitor encontrará mais exemplos nos textos abaixo. Mais especificamente, sugerimos os exercícios da seção 3.6 de [1], os problemas 7 - 11 de [2] e a seção 1.5 da última referência.

Uma ou duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
2. A. Caminha. *Desigualdades Elementares*. Revista Eureka! n^o 5, 1999.
3. R. B. Manfrino. et al. *Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach*. Birkhäuser, 2009.