Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Diferenciação Implícita - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de Julho de 2025

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Discutiremos mais alguns exemplos relacionados ao método de diferenciação implícita.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Determine a derivada da função $y = y(x)$, definida implicitamente por*

$$y - a\,\mathrm{sen}\,y = x,$$

em que a é uma constante não nula [1].

Solução. Diferenciando implicitamente a relação do enunciado, obtemos

$$y' - a\cos(y)\cdot y' = 1,$$

de onde segue imediatamente que

$$y' = \frac{1}{1 - a\cos y}.$$

□

Exemplo 2. *A* cissóide de Diocles[2] *é a curva*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2(2 - x) = x^3\}.$$

Encontre as equações para as retas tangente e normal a $\mathcal{C}$ no ponto $(1, 1)$.

Solução. Admitindo que a equação de $\mathcal{C}$ define, num intervalo centrado em $x = 1$, a ordenada y como função da abscissa x, tomamos a derivada com respeito a x em ambos os membros da igualdade $y^2(2 - x) = x^3$, obtendo

$$2yy'(2 - x) - y^2 = 3x^2.$$

[1] A relação do enunciado associa-se à chamada *equação de Kepler*, estudada em *Astrodinâmica*. Vide [1].

[2] Veja `https://en.wikipedia.org/wiki/Cissoid_of_Diocles` para um esboço.

Operando as substituições $x = 1, y = 1$ na relação anterior, vem que $y'(1) = 2$. Daí, as inclinações das retas tangente t e normal n à cissóide de Diocles no ponto $(1, 1)$ são iguais a 2 e $-1/2$, respectivamente. Logo, as equações dessas retas são

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{e} \quad y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1),$$

ou seja, $t : 2x - y - 1 = 0$ e $n : x + 2y - 3 = 0$. $\square$

Exemplo 3. *Mostre que a soma dos interceptos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.*

Solução. Diferenciando implicitamente a relação dada, encontramos

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0,$$

o que permite escrever a fórmula

$$y'(x) = -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Portanto, sendo t a reta tangente ao gráfico da função $y = y(x)$ no ponto (a, b), com $a, b > 0$, vale

$$t : y - b = -\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot (x - a).$$

Logo, se $(u, 0)$ e $(0, v)$ forem os pontos de interseção da tangente t com os eixos coordenados, teremos

$$-b = -\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot (u - a) \quad \text{e} \quad v - b = -\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot (-a).$$

Resolvendo as equações acima para u e v, obtemos

$$u = a + \sqrt{ab} \quad \text{e} \quad v = b + \sqrt{ab},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} u + v &= a + 2\sqrt{ab} + b \\ &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = c. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 4. *Em quais pontos da curva*

$$x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y = 1 \tag{1}$$

a reta tangente é paralela ao eixo das abscissas?

Solução. Como antes, o cálculo de y' consiste em diferenciar implicitamente a relação dada, o que fornece a igualdade

$$2x + y + xy' + 2yy' - 2 - 2y' = 0,$$

ou seja,

$$(2x + y - 2) + (x + 2y - 2)y' = 0. \tag{2}$$

Se (x, y) for um ponto do gráfico da equação (1) no qual $y'(x) = 0$, a relação anterior implica $2x + y - 2 = 0$, isto é, $y = 2(1-x)$. Substituindo esse valor de y na equação da curva, obteremos, após alguns cálculos elementares, $3x^2 - 4x - 1 = 0$. Resolvendo essa equação quadrática, vem que $x = (2 \pm \sqrt{7})/3$, de modo que os valores correspondentes de y são $2 \cdot (1 \mp \sqrt{7})/3$.

Como os pares $(x, y) = ((2 \pm \sqrt{7})/3, 2 \cdot (1 \mp \sqrt{7})/3)$ satisfazem $2x + y - 2 = 0$ e $x + 2y - 2 \neq 0$, segue de (2) que $y'(x) = 0$ para tais valores de x. Concluindo, os únicos pontos da curva (1) nos quais a reta tangente é paralela ao eixo das abscissas são $((2 \pm \sqrt{7})/3, 2 \cdot (1 \mp \sqrt{7})/3)$. $\square$

Exemplo 5. *A função* W de Lambert *é definida implicitamente pela equação* $ye^y = x$. *Mostre que existem dois "ramos" deriváveis* W_- *e* W_+ *da função de Lambert. Mais precisamente, se* $a := -1/e$, *mostre que existem funções deriváveis* $W_- : (a, 0) \to \mathbb{R}$ *e* $W_+ : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tais que* $W_\pm(x)e^{W_\pm(x)} = x$ *para todo* x *no domínio de* $W_\pm$. *Além disso, calcule a derivada dessas funções e mostre que a reta tangente ao gráfico do ramo* W_+ *na origem é a bissetriz dos quadrantes ímpares.*

Solução. Nesse exemplo, não basta calcular a derivada da função W de Lambert. Também é necessário estabelecer sua existência, ou melhor, provar que os ramos W_- e W_+ de W existem como funções reais deriváveis, definidas nos intervalos $(a, 0)$ e $(a, +\infty)$, respectivamente.

Nesse sentido, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(y) = ye^y$. Pelas regras de derivação, f é derivável, valendo $f'(y) = (y+1)e^y$ para cada real y, de sorte que f' é positiva (resp. negativa) no intervalo $(-1, +\infty)$ (resp. $(-\infty, -1)$). Em particular, f é crescente (resp. decrescente) em $(-1, +\infty)$ (resp. $(-\infty, -1)$).

Uma vez que

$$f(-1) = a, \quad \lim_{y \to -\infty} f(y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to +\infty} f(y) = +\infty,$$

as restrições de f aos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$ definem bijeções deriváveis $f_- : (-\infty, -1) \to (a, 0)$ e $f_+ : (-1, +\infty) \to (a, +\infty)$. Tendo em conta que as derivadas de f_- e f_+ nunca se anulam, pois $f'_- < 0 < f'_+$, o Teorema da Função Inversa [3] garante que as inversas dessas funções também são deriváveis. Portanto, pondo $W_\pm := f_\pm^{-1}$, obtemos funções deriváveis $W_- : (a, 0) \to \mathbb{R}$ e $W_+ : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Uma vez que $f \circ W_\pm$ é a identidade no domínio de $W_\pm$, a regra $f(y) = ye^y$, com $y = W_\pm(x)$, dá

$$x = f(W_\pm(x)) = W_\pm(x)e^{W_\pm(x)}.$$

A conclusão dessa igualdade é que W_- e W_+ estão definidas implicitamente por $ye^y = x$.

Para obter a derivada dessas funções, derivamos implicitamente a relação $ye^y = x$, obtendo $y'(y+1)e^y = 1$, ou seja, $y' = 1/(y+1)e^y$ [4]. Logo, para cada x no domínio da função $W_\pm$, vale

$$W'_\pm(x) = \frac{1}{(W_\pm(x) + 1)e^{W_\pm(x)}}.$$

Para encerrar, sendo $f_+(0) = 0$, segue que $W_+(0) = 0$, de forma que $W'_+(0) = 1/[(0+1) \cdot e^0] = 1$. Portanto, a equação da reta tangente requerida é $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, que nada mais é que a bissetriz dos quadrantes ímpares $x = y$. $\square$

[3] Confira o Teorema 6 da aula *Reta Tangente - Parte I*, no módulo *Definição de Derivada*.

[4] Chegaríamos ao mesmo resultado utilizando a fórmula da derivada da função inversa, exposta na aula citada na nota de rodapé anterior.

Exemplo 6. *Prove que a função y, definida no intervalo $(0,1)$ e tomando valores nele mesmo, definida implicitamente pela igualdade $x^y = y$, é derivável e calcule sua derivada.*

Solução. Começaremos observando que, de acordo com o Exemplo 12 da aula *Exercícios - Parte I*, no módulo *Funções Contínuas*, existe uma única função nas condições do enunciado. Mais precisamente, mostramos naquela aula que existe uma única função $f:(0,1)\to(0,1)$ satisfazendo $x^{f(x)} = f(x)$, para todo $x \in (0,1)$, sendo que f é um *homeomorfismo* (uma bijeção contínua com inversa contínua). Dessa forma, o exemplo pede que se estabeleça a diferenciabilidade de f e solicita o cálculo de sua derivada.

Se g denota a função inversa de f, a substituição $x = g(y)$ na relação $x^{f(x)} = f(x)$ retorna $g(y)^{f(g(y))} = f(g(y))$ ou, ainda, $g(y)^y = y$. Portanto,

$$g(y) = y^{1/y} = e^{\frac{\ln y}{y}},$$

e segue imediatamente das regras de derivação que g é derivável, com

$$\begin{aligned} g'(y) &= e^{\frac{\ln y}{y}} \cdot \frac{d((\ln y)/y)}{dy} \\ &= g(y) \cdot \frac{\frac{1}{y}\cdot y - \ln y \cdot 1}{y^2} \\ &= g(y) \cdot \frac{1-\ln y}{y^2}. \end{aligned}$$

Notando que $\ln y < 0 < g(y)$ para todo $0 < y < 1$, o cálculo acima mostra que a derivada de g é positiva. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, $f := g^{-1}$ é derivável (uma vez que a derivada de g nunca se anula), valendo $f' = 1/(g' \circ f)$. Ainda pela fórmula de $g'(y)$, vem que

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{g(f(x))\cdot \frac{1-\ln f(x)}{f(x)^2}},$$

isto é,

$$f'(x) = \frac{f(x)^2}{x(1-\ln f(x))}. \tag{3}$$

$\square$

Observação 7. *Em relação ao exemplo anterior, é claro que também poderíamos ter calculado a derivada de $y = f(x)$ por diferenciação implícita. Com efeito, tomando o logaritmo natural de cada membro da igualdade $x^y = y$, obtemos $y \cdot \ln x = \ln y$. Diferenciando implicitamente essa última relação, vem*

$$y' \cdot \ln x + \frac{y}{x} = \frac{y'}{y}.$$

Com algumas manipulações algébricas elementares, chega-se a $y' = -\frac{y^2}{x(\ln x^y - 1)}$, equação que pode ser escrita na forma

$$y' = \frac{y^2}{x(1 - \ln y)},$$

o que, por sua vez, está de acordo com (3).

Para os próximos exemplos, precisaremos de algumas definições.

Uma função real de duas variáveis reais F é dita *polinomial* se $F(x, y)$ consistir de uma soma finita de termos da forma kx^iy^j, sendo $k \in \mathbb{R}$ e i, j inteiros não negativos. Por exemplo, a adição $(x, y) \mapsto x + y$, a multiplicação $(x, y) \mapsto x \cdot y$ e a regra $(x, y) \mapsto 2025 + x - x^3y^2 + x^7y^2$ definem funções polinomiais. (Observe que o domínio maximal de uma função polinomial é o plano $\mathbb{R}^2$.)

Qualquer função polinomial $F = F(x, y)$ admite uma representação na forma

$$F(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \ldots + a_n(x)y^n, \quad (4)$$

em que $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ são funções polinomiais *apenas da variável x*. De fato, basta definir $a_j(x)$ como a soma de todos os termos kx^i para os quais kx^iy^j compõe a expressão que define $F(x, y)$. Como ilustração, se

$$F(x, y) = 2025 + x - x^3y^2 + x^7y^2,$$

então $a_0(x) = 2025 + x$, $a_1 \equiv 0$ e $a_2(x) = -x^3 + x^7$.

Uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *algébrica* (sobre $\mathbb{R}$) quando existir uma função polinomial não identicamente nula F definindo f implicitamente, isto é, tal que $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Por exemplo, as regras $y = |x|$ e $y = \sqrt[3]{(x-1)/(x+1)}$ definem funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ em $\mathbb{R}$, respectivamente, as quais são algébricas porque se exprimem implicitamente por $y^2 - x^2 = 0$ e $(x+1)y^3 - (x-1) = 0$.

Além disso, toda função racional $x \mapsto f(x) = p(x)/q(x)$, sendo p e q polinômios, é algébrica, já que $F(x, y) = q(x)y - p(x)$ é um polinômio em duas variáveis satisfazendo a relação $F(x, f(x)) = 0$ para cada x no domínio de f. Em particular, toda função polinomial é algébrica.

Convém relembrar que existem funções algébricas que não podem ser explicitadas de uma forma conveniente, como é o caso de uma função $y = y(x)$ definida implicitamente por $y^5 - y - x = 0$ (confira a 1ª seção da 1ª parte dessa aula).

Por outro lado, uma função suave $f : I \to \mathbb{R}$ que *não* é algébrica chama-se *transcendente* [5].

Exemplo 8. *Mostre que a função exponencial é transcendente.*

Solução. Se $\exp : x \mapsto e^x$ fosse algébrica, existiria um polinômio não identicamente nulo e em duas variáveis F, na forma (4), digamos, tal que $F(x, e^x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que o polinômio a_n é não identicamente nulo, sendo n um inteiro não negativo. Portanto, dividindo ambos os membros da igualdade

$$a_0(x) + a_1(x)e^x + \ldots + a_{n-1}(x)e^{(n-1)x} + a_n(x)e^{nx} = 0$$

por e^{nx}, teríamos

$$\frac{a_0(x)}{e^{nx}} + \frac{a_1(x)}{e^{(n-1)x}} + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{e^x} + a_n(x) = 0$$

para todo real x.

[5] Confira a seção *Dicas para o Professor*.

Como exp cresce mais rapidamente que qualquer polinômio [6], as n primeiras parcelas da igualdade acima tenderiam a 0 quando $x \to +\infty$, de onde concluiríamos que $\lim_{x\to+\infty} a_n(x) = 0$. Todavia, os limites no infinito de um polinômio não identicamente nulo são infinitos ou constantes não nulas. Essa contradição mostra que exp não pode ser algébrica.

Por fim, como exp é suave, concluímos que trata-se de uma função transcendente. □

Observação 9. *Com os mesmos argumentos do exemplo anterior, é possível mostrar que* qualquer *função exponencial* $x \mapsto a^x$*, em que* a *é um número real positivo, é transcendente.*

Exemplo 10. *Sejam* I, J *intervalos da reta e* $f : I \to J$ *uma função algébrica invertível. Mostre que a inversa de* f *também é algébrica.*

A partir daí, conclua que, se um difeomorfismo entre intervalos for transcendente, sua inversa também o será. Em particular, pelo exemplo anterior, a função logaritmo natural é transcendente.

Solução. De início, vale lembrar que a inversa de uma bijeção contínua entre intervalos também é uma funçao contínua (consulte a subseção 1.3 da aula *Continuidades Laterais e em um Intervalo*, no módulo *Funções Contínuas*). Com isso em mente, só precisamos mostrar que a inversa de f é definida implicitamente por uma relação polinomial.

Com efeito, se cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f satisfizer a relação polinomial $F(x, f(x)) = 0$, então, fazendo $x = f^{-1}(y)$, seguirá que $F(f^{-1}(y), y) = 0$ para todo $y \in J$. Portanto, definindo $G(x, y) := F(y, x)$, vem que G é uma função polinomial, não identicamente nula se $F \not\equiv 0$, e tal que $G(y, f^{-1}(y)) = 0$ para cada ponto $y \in J$. Desse modo, a inversa f^{-1} de f também é algébrica.

[6] Confira o Exemplo 3 da aula *Exercícios - Parte I*, do módulo *Derivada como Função.*

Por fim, notando que a inversa de um difeomorfismo suave também é suave [7], o argumento do parágrafo anterior garante que um difeomorfismo transcendente só pode ter inversa transcendente. $\square$

Exemplo 11. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função algébrica cujo conjunto dos zeros tem complementar (relativamente ao intervalo I) denso em I. Mostre que o conjunto dos zeros de f é finito.*

Portanto, as funções cos *e* sen *são transcendentes.*

Solução. Nas condições do enunciado, afirmamos que existe uma função polinomial em duas variáveis F, na forma (4), satisfazendo $F(x, f(x)) = 0$ para cada $x \in I$, *com* $a_0 \not\equiv 0$. Se assim for, todo zero $x \in I$ de f satisfará

$$a_0(x) = F(x, 0) = F(x, f(x)) = 0,$$

de onde seguirá que os zeros de f estão entre as raízes do polinômio a_0. Como o conjunto das raízes de um polinômio não identicamente nulo é finito, concluiremos que o conjunto dos zeros de f também será finito.

Portanto, a solução estará encerrada após justificarmos a afirmação do parágrafo anterior.

Sendo f algébrica, existe algum polinômio não identicamente nulo G definindo f implicitamente pela relação $G(x, y) = 0$, em que

$$G(x, y) = b_0(x) + b_1(x)y + \ldots + b_m(x)y^m.$$

Se tivermos $b_0 \not\equiv 0$, terminamos: basta pôr $n = m$ e $a_i = b_i$ para cada $0 \leq i \leq m$. Caso contrário, como G não é identicamente nulo, existe um inteiro positivo $k \leq m$ para o qual $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ são identicamente nulos, mas b_k não o é. Assim, vale

$$b_k(x)f(x)^k + \ldots + b_m(x)f(x)^m = G(x, f(x)) = 0,$$

ou seja,

$$f(x)^k(b_k(x) + b_{k+1}(x)f(x) + \ldots + b_m(x)f(x)^{m-k}) = 0 \quad (5)$$

[7] Vide Proposição 7 e os comentários que seguem na seção 3 da aula anterior (*Regra da Cadeia - Demonstração*).

para todo $x \in I$.

Por hipótese, o conjunto $X := \{x \in I \mid f(x) \neq 0\}$ é denso em I, enquanto, por (5),

$$b_k(x) + b_{k+1}(x)f(x) + \ldots + b_m(x)f(x)^{m-k} = 0$$

para cada $x \in X$. Sendo o 1º membro da relação anterior (a regra de) uma função contínua, o exemplo 1 da aula *Exercícios - Parte II*, no módulo *Funções Contínuas*, garante que

$$b_k(x) + b_{k+1}(x)f(x) + \ldots + b_m(x)f(x)^{m-k} = 0$$

para todo $x \in I$. Portanto, pondo $n = m - k$ e $a_i = b_{k+i}$ para cada $0 \leq i \leq m - k$, segue que o polinômio associado F, definido por (4), cumprirá as condições enunciadas na afirmação. $\square$

Dicas para o Professor

O benefício do método de diferenciação implícita está na possibilidade de se determinar a derivada de uma função $y = y(x)$, definida implicitamente por uma relação $F(x, y) = 0$, à revelia do fato de haver uma regra explícita para y. Isso se constitui numa via imprescindível para os casos em que não se pode explicitar a função y, tendo se mostrado útil mesmo quando existe uma fórmula para $y(x)$.

Mas, afinal de contas, o que entendemos por "explicitar y"? Depende. Para o caso em que F é polinomial, o significado já foi explicado na introdução da 1ª parte dessa aula. Em geral, *"explicitar y" significa expressar y em termos de um conjunto conveniente de funções.*

Para compreender a afirmação anterior, a seguinte definição será útil. Seja $\mathcal{C}$ um conjunto não vazio de funções e $G_{\mathcal{C}}$ o conjunto de funções *gerado* por $\mathcal{C}$ [8]. Isso significa que $G_{\mathcal{C}}$ é o *menor* conjunto de funções satisfazendo as condições abaixo:

[8] Interpretação: $\mathcal{C}$ é o *conjunto conveniente* e $G_{\mathcal{C}}$ é o *conjunto das funções que se exprimem a partir de* $\mathcal{C}$.

(i) $\mathcal{C} \subset G_{\mathcal{C}}$;

(ii) se a for um número real e f, g forem funções em $G_{\mathcal{C}}$, então $a \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ e f/g pertencem a $G_{\mathcal{C}}$;

(iii) se $f, g \in G_{\mathcal{C}}$, então $f \circ g \in G_{\mathcal{C}}$.

Para o estudo do cálculo diferencial/integral e suas aplicações, uma classe relevante de funções é a classe das *funções elementares* $\mathbb{E}$, sendo $\mathbb{E} = G_{\mathcal{C}}$ para $\mathcal{C} = \{\mathrm{Id}, \exp, \ln, \mathrm{sen}\}$ [9]. Observe que cada função constante é elementar, pois, se a for um número real, a função $x \mapsto a = a \cdot (e^x/e^x)$ pertence a $\mathbb{E}$ por (i) e (ii). A função cosseno também é elementar, já que $\mathrm{Id} - \pi/2$ é elementar [10] e, portanto, $\cos = \mathrm{sen} \circ (\mathrm{Id} - \pi/2)$ também o é, por (i) e (iii).

Acrescente-se a isso o fato de que também são elementares todas as funções racionais, monomiais [11], trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e as funções obtidas dessas por meio das operações consideradas acima (itens (ii) e (iii)). O montante produzido é, praticamente, a totalidade das funções que estudamos até então! Dessa forma, é razoável considerar que *uma função f tem regra explícita quando f for elementar*.

Há, contudo, várias funções importantes que não são elementares. Uma delas é a função W de Lambert, considerada no exemplo 5 [12]. Muito embora tenhamos $W \notin \mathbb{E}$, o artigo [6] apresenta uma variedade de problemas cujas soluções fazem uso da função de Lambert. Desse modo, se uma determinada função f, apesar de não elementar, se expressa em termos de funções elementares e de W, é plausível julgar esse fato suficientemente satisfatório a ponto de interpretar que f está dada explicitamente.

Essa situação vai ao encontro da afirmação acima de que "explicitar uma função significa expressá-la em termos de um conjunto conveniente de funções". Para efeito de

[9] Há outras definições de $\mathbb{E}$ na literatura. Para os nossos propósitos, adaptamos a definição apresentada no capítulo 6 da referência [5].

[10] Justifique essa afirmação.

[11] Funções do tipo $0 < x \mapsto x^k = e^{k \ln x}$, sendo k um número real.

[12] Para mais funções relevantes não elementares, pesquise sobre a função Gama e as funções de Bessel.

ilustração, observemos o caso de uma função $y = y(x)$ definida implicitamente por $y^y = e^x$; embora não elementar, essa função se exprime como $y = \exp \circ W$. Nas notações acima, ocorre, em particular, a pertinência $y \in G_{\mathcal{D}}$, em que $\mathcal{D} = \{\mathrm{Id}, \exp, \ln \operatorname{sen}, W\}$.

O parágrafo anterior corroborou um fato esperado: adicionando novas funções ao conjunto gerador $\mathcal{C}$, permitimos que mais funções sejam explicitadas.

Falando na função W de Lambert, alguns textos denotam os ramos W_- e W_+ por W_{-1} e W_0, respectivamente. Também há a possibilidade de estender continuamente esses ramos aos intervalos $[a, 0)$ e $[a, +\infty)$, pondo $W_\pm(a) = -1$, em que $a = -1/e$. De todo modo, vale mencionar que as soluções de algumas equações exponenciais podem ser expressas em termos de W. Por exemplo, a única solução da equação $x + e^x = 0$ é $-W_+(1)$, enquanto as soluções de uma equação do tipo $x^x = k$, para $k \geq (1/e)^{1/e}$, são da forma $\exp(W(\ln k))$. (Analisando os ramos estendidos de W, não é difícil ver que há uma única solução se $k = (1/e)^{1/e}$ ou $k \geq 1$, ao passo que existem duas soluções caso $(1/e)^{1/e} < k < 1$.)

Costuma-se exigir, como parte da definição, que uma função transcendente $f : I \to \mathbb{R}$ seja *analítica* (vide [2]). Dizer que f é analítica significa que, para cada ponto $a \in I$, existem um intervalo aberto I_a centrado em a e uma sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ de números reais tais que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots,$$

para cada $x \in I_a \cap I$. A interpretação da igualdade acima é de que, se $x \in I_a \cap I$, o limite das somas parciais

$$a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n,$$

quando $n \to \infty$, existe e coincide com o valor $f(x)$ [13]. Por exemplo, *todas* as funções elementares são analíticas [14].

[13] Confira as seções 4 dos capítulos VIII e X da referência [4].

[14] Em relação à inversão de funções, vale dizer que se uma função analítica for invertível, sua inversa será analítica, a menos de subtraírmos do domínio um conjunto discreto. A bijeção analítica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida

Toda função analítica é suave, mas a recíproca é falsa. De fato, é possível mostrar que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

embora suave, não é analítica em nenhum intervalo aberto contendo a origem. Ademais, com argumentos semelhantes àqueles utilizados na solução do exemplo 8, demonstra-se que φ é transcendente (de acordo com nossos critérios).

Portanto, nossa definição de função transcendente é estritamente mais ampla que aquela costumeiramente encontrada na literatura. A razão dessa extensão, qual seja, a substituição da condição "f é analítica" por "f é suave", permitiu que continuássemos no escopo de nossas notas, ao mesmo tempo que não compremete os resultados trabalhados no texto. Realmente, as observações acima e os argumentos apresentados nas soluções dos últimos três exemplos mostram que as funções exp, ln, cos e sen são transcendentes, mesmo segundo a definição que requer analiticidade. Quanto à validade do exemplo 10 nesse contexto mais restrito, basta saber que o inverso de um difeomorfismo analítico ainda é analítico, um resultado básico da teoria das funções analíticas (mas bem além do que podemos fazer aqui).

No ambiente das funções analíticas, o conceito de transcendência torna-se, por assim dizer, "puro", no sentido de que se I for um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ for transcendente (e analítica), então a restrição de f a qualquer intervalo (não degenerado) $J \subset I$ ainda será transcendente. Isso não é verdade sob a hipótese mais fraca de suavidade: a função φ, definida há pouco, é transcendente segundo nossa definição, embora φ seja algébrica na semirreta $(-\infty, 0]$.

---

por $f(x) = x - \operatorname{sen} x$, exemplifica esse fato. Com efeito, a derivada de f se anula precisamente no conjunto discreto $\mathbb{D} := \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Como $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, segue que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{D}$ é o conjunto dos pontos em que f^{-1} é derivável. Em particular, f^{-1} não é suave e, portanto, não é analítica (confira o próximo parágrafo do texto). Por outro lado, prova-se que a restrição de f^{-1} ao complementar de $\mathbb{D}$ é analítica.

Encerraremos observando que, conforme constatamos nos exemplos, uma relação $F(x,y)=0$ pode determinar mais de uma função [15]. Na última parte dessa aula, estudaremos condições suficientes para que uma relação $F(x,y)=0$ defina, localmente, uma única função derivável $y=y(x)$. Tais considerações conduzirão a um importante resultado, conhecido como o *Teorema da Função Implícita*.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_equation

2. https://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental_function

3. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.

4. E. L. Lima. *Curso de Análise, Volume 1.* 15ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

5. K. Knopp. *Infinite Sequences and Series.* New York: Dover, 1956.

6. D. E. Knuth. et al. *On the Lambert W Function.* Advances in Computational Mathematics, Vol 5 (1996), 329 - 359.

[15] Vimos, na introdução da 1ª parte dessa aula, que a relação $x^2+y^2-1=0$ define implicitamente as funções $f_\pm:[-1,1]\to[-1,1]$, definidas por $f_\pm(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$. Outrossim, a relação $ye^y-x=0$ define os ramos $W_\pm$ da função de Lambert.