Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1

Motivação: derivada e integral

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

06 de julho de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Neste módulo, veremos dois dos problemas geométricos que deram origem ao estudo do Cálculo. O mais antigo, com o qual se ocuparam grandes sábios gregos da Antiguidade Clássica, como o grande Arquimedes de Siracusa (288–212 aC), é o cálculo de áreas e de volumes. Nos deteremos aqui, por simplicidade, ao cálculo da área de um círculo.

O segundo diz respeito à determinação de retas tangentes a curvas planas que não sejam necessariamente seções cônicas. Seu estudo é mais "recente" (século XVII), embora o problema tenha sido resolvido, para cônicas, pelos antigos gregos.

1 Cálculo de áreas

Lembremos que um *círculo* é o conjunto de todos os pontos que estão a uma distância fixa $r > 0$ (seu raio) de um ponto fixado O (seu centro).

Um fato notável sobre círculos é que *todos os círculos são semelhantes*. Em particular, a razão entre o seu comprimento C e o seu diâmetro d (a maior distância entre dois pontos sobre o círculo, igual ao dobro do raio) tem sempre o mesmo valor; chamamos esse valor de π.

Podemos dizer que o número π *captura aritmeticamente o fato geométrico mencionado no parágrafo anterior*. Então, escrevemos $\frac{C}{d} = \pi$, ou seja, $C = \pi d = \pi \cdot 2r$, de forma que

$$C = 2\pi r. \tag{1}$$

A expressão (1) nos permite calcular o comprimento de um círculo uma vez que se conheça seu raio.

Também sabemos que a **área** A da região do plano delimitada por um círculo pode ser calculada através de uma expressão bem simples:

$$A = \pi r^2. \tag{2}$$

Por que a fórmula (2) é válida? A seguir, daremos duas justificativas para isso, uma mais intuitiva e outra mais formal.

Para o argumento intuitivo, consideremos um círculo de raio r e um polígono regular, inscrito ou circunscrito ao círculo dado. É aceitável pensarmos que, à medida que o número de lados desse polígono regular aumenta, ele se torna cada vez mais próximo do círculo. Se o polígono for inscrito, ele se aproxima do círculo *por falta*. Isso significa que tanto seu perímetro quanto sua área têm valores próximos a, mas menores que, o comprimento do círculo e a área da região por ele delimitada, respectivamente. Por outro lado, se o polígono for circunscrito ao círculo, seu perímetro e sua área serão aproximações *por excesso* para (ou seja, maiores que) o comprimento do círculo e a área da região por ele delimitada, respectivamente.

O perímetro de um polígono regular de $n \geq 3$ lados é dado por $p_n = n \cdot \ell_n$, onde ℓ_n é o número de lados desse polígono. A distância do centro de um polígono de n lados a cada um dos seus lados é chamada de **apótema** do polígono e denotada por a_n. Unindo o centro do polígono a seus vértices, o dividimos em n triângulos congruentes, de base ℓ_n e altura a_n. Dessa forma, a área de um polígono regular de n lados é dada por

$$A_n = n \cdot \frac{\ell_n a_n}{2} = \frac{p_n a_n}{2}. \tag{3}$$

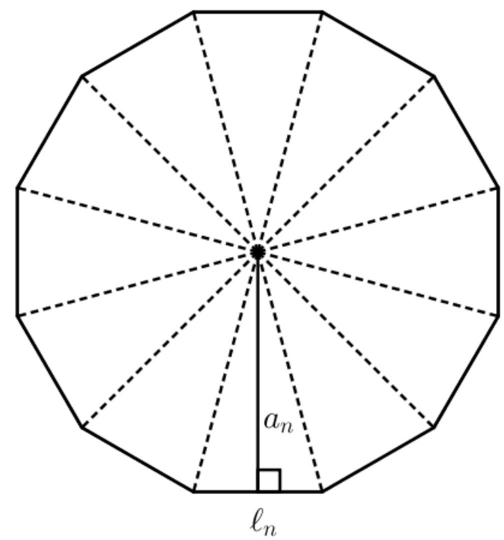

Figura 1: polígono regular de lado ℓ_n e apótema a_n.

Quando n fica *muito grande*, o apótema a_n se aproxima do raio r do círculo e o perímetro p_n se proxima do comprimento $2\pi r$ do círculo. Assim, observando as identidades (3), vemos que, à medida que n cresce, a área do polígono se aproxima de

$$\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2. \tag{4}$$

Portanto, assumindo que a área do polígono de n lados inscrito ou circunscrito ao círculo de raio r se aproxima da área do círculo, concluímos que essa área vale πr^2.

Observação 1. *O argumento acima se baseia fortemente na hipótese de que as áreas dos polígonos inscritos, ou circunscritos, ao círculo, se aproximam da área do círculo, à medida em que o número de lados do polígono aumenta. Na subseção a seguir, desenvolveremos um argumento que não exige esse tipo de suposição.*

1.1 O método da exaustão

Vamos, agora, explicar a validade da fórmula (2) de um modo mais preciso. Mostraremos que a área A do círculo não pode ser nem maior nem menor do que πr^2. Isso força essa área a ser igual a πr^2.

Vamos chamar a área de um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo de raio r, de s_n, e a área de um polígono regular de n lados, circunscrito a esse mesmo círculo, de S_n. Vamos assumir a validade dos seguintes fatos:

i. Para cada $n \geq 3$, $s_n < A < S_n$.

ii. Se $\varepsilon > 0$ é um número real, podemos encontrar n suficientemente grande tal que

$$S_n - s_n < \varepsilon.$$

Em particular, ii. implica que, para n suficientemente grande, tanto s_n quanto S_n podem estar arbitrariamente próximos de A.

A discussão que desenvolvemos anteriormente mostra que as áreas s_n e S_n se aproximam de πr^2, por falta e por excesso, respectivamente. Mais ainda, para cada $n \geq 3$,

$$s_n < \pi r^2 < S_n. \tag{5}$$

Agora, temos a seguinte situação: tanto A quanto πr^2 estão *sempre* entre s_n e S_n, não importa qual seja o número n de lados do polígono. Ademais, a diferença $S_n - s_n$ pode ficar arbitrariamente pequena, desde que se considere o número de lados suficientemente grande. Vamos mostrar que esses dois fatos forçam a igualdade entre os números A e πr^2.

Supondo que $\pi r^2 < A$, podemos escrever $\varepsilon = A - \pi r^2 > 0$. A condição ii. nos diz que, para n suficientemente grande, temos $S_n - s_n < \varepsilon$. Assim,

$$S_n - s_n < A - \pi r^2$$

e isso implica

$$S_n = s_n + (S_n - s_n) < s_n + (A - \pi r^2).$$

Como $s_n < \pi r^2$ para cada n, temos que $s_n - \pi r^2 < 0$; logo,

$$S_n < s_n + (A - \pi r^2) = A + (s_n - \pi r^2) < A.$$

Mas essa desigualdade, $S_n < A$, contradiz a condição i. Portanto, não pode ocorrer $\pi r^2 < A$.

Supondo, agora, que $A < \pi r^2$, podemos escrever $\varepsilon = \pi r^2 - A > 0$. Novamente pela condição ii., temos

$$S_n - s_n < \pi r^2 - A$$

para n suficientemente grande. Agora,

$$S_n = s_n + (S_n - s_n) < s_n + (\pi r^2 - A).$$

Como $s_n < A$ para cada n, temos que $s_n - A < 0$; logo,

$$S_n < s_n + (\pi r^2 - A) = \pi r^2 + (s_n - A) < \pi r^2.$$

Chegamos, assim, à desigualdade, $S_n < \pi r^2$, a qual contradiz a condição (5). Portanto, não pode ocorrer $A < \pi r^2$.

Como A não pode ser nem menor nem maior do que πr^2, deve ocorrer, necessariamente, a igualdade $A = \pi r^2$.

Observação 2. *Para comprovarmos a validade das desigualdades em (5), observemos que o perímetro p_n e o apótema a_n de um polígono regular inscrito em um círculo de raio r são sempre menores do que o comprimento desse círculo e seu raio, respectivamente. Assim,*

$$s_n = \frac{p_n \cdot a_n}{2} < \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

Por outro lado, o perímetro P_n de um polígono regular circunscrito a um círculo de raio r é sempre maior do que o comprimento $2\pi r$ desse círculo. Como todo polígono regular de n lados, circunscrito a um círculo de raio r, pode ser dividido em n triângulos congruentes, de altura r e base igual ao lado do polígono, a sua área é dada por

$$S_n = \frac{P_n \cdot r}{2} > \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

Portanto, $s_n < \pi r^2 < S_n$.

2 Reta tangente ao gráfico de uma função

Consideremos uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. O **gráfico** da função f é o conjunto

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}.$$

Nesta seção, vamos dar respostas para as seguintes perguntas:

> Existe uma reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(a, f(a))$? Em caso afirmativo, como encontrar a equação dessa reta tangente?

A própria noção de tangência, para curvas em geral, requer uma formulação mais adequada do que a dada para cônicas. De fato, uma reta é tangente a uma cônica não degenerada se, e somente se, tiver exatamente um ponto em comum com essa cônica. Essa definição não funciona da mesma maneira para curvas como, por exemplo, o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

Na Figura 2, a reta t é tangente ao gráfico da função f no ponto P, mas não é tangente a esse gráfico no ponto Q. Isso ocorre porque a noção de tangência é *local*, ou seja, depende apenas do comportamento da curva nas proximidades do ponto de tangência.

Mas como definir adequadamente o que vem a ser a reta tangente ao gráfico de uma função em um de seus pontos? Uma possível formulação é a seguinte:

> Uma reta t é tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $A = (a, f(a))$ desse gráfico, se t ocupa uma *posição limite* da reta secante a esse gráfico por A e $B = (x, f(x))$, quando x se aproxima de a.

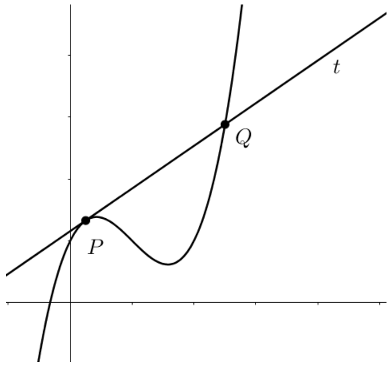

Figura 2: a reta t é tangente ao gráfico da função f no ponto P, mas não no ponto Q.

Isso significa que, se B é um ponto que se move ao longo do gráfico de f e s é uma reta que passa pelo ponto fixado A e pelo ponto móvel B, então a reta s se aproxima da reta t quando o ponto B se aproxima do ponto A.

Em termos de coordenadas, podemos calcular o coeficiente angular m_s da reta s que passa por $A = (a, f(a))$ e $B = (x, f(x))$. Ele é igual à tangente do ângulo θ formado por s e pela parte positiva do eixo das abscissas, medido no sentido anti-horário (veja a figura 3):

$$m_s = \operatorname{tg}\theta = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{6}$$

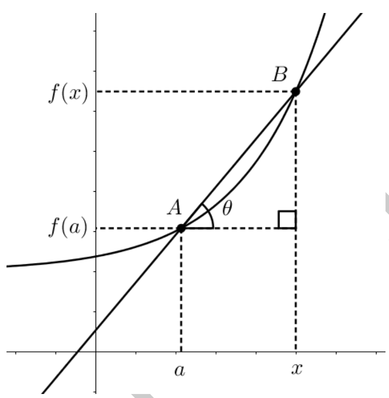

Figura 3: o coeficiente angular da secante $s = \overleftrightarrow{AB}$.

Suponha que exista um número real m tal que, para qualquer **exigência de proximidade** $\varepsilon > 0$ entre m_s e m, exista uma **garantia de proximidade** $\delta > 0$ entre x e a, tal que, se a distância entre x e a, dada por $|x - a|$, for menor do que a garantia δ, então a distância entre m_s e m, dada por $|m_s - m|$, será menor do que a exigência ε; de outra forma, suponha que valha a implicação

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |m_s - m| < \varepsilon. \tag{7}$$

Neste caso, dizemos que o número real m é o **limite** de m_s quando x tende a a. Para indicar isso, escrevemos

$$\lim_{x \to a} m_s = m.$$

Levando (6) em conta, isso é o mesmo que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m. \tag{8}$$

É possível justificar que, se esse número real m existe, então ele é *único*. Nesse caso, a reta que passa por $(a, f(a))$ e tem coeficiente angular m é a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Exemplo 3. *Determine, se existir, a equação da reta que tangencia o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, no ponto $(2, 4)$.*

Solução. A reta tangente ao gráfico no ponto indicado terá equação

$$y - 4 = m(x - 2),$$

desde que o seu coeficiente angular m possa ser calculado. Nas notações da discussão que precede esse exemplo, se $x \neq 2$, podemos escrever

$$m_s = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Observe agora que, quando x assume valores próximos de 2, o número $x + 2$ assume valores próximos de $2 + 2 = 4$. Assim, o número 4 é o candidato natural a ser o coeficiente angular da reta tangente procurada. Podemos verificar que $m = 4$ de fato satisfaz a condição (7): dada uma exigência qualquer de proximidade $\varepsilon > 0$, podemos considerar a garantia $\delta = \varepsilon > 0$. Temos que, se $|x - 2| < \delta$, então $|m_s - 4| = |x + 2 - 4| = |x - 2| < \delta = \varepsilon$.

Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 4)$ é $y - 4 = 4(x - 2)$. $\square$

O próximo exemplo ilustra uma situação na qual não há como definir a tangente ao gráfico.

Exemplo 4. *Considere a função modular $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|$. O gráfico de f tem reta tangente no ponto $(0, 0)$?*

Solução. A resposta é *não.* Isso pode ser percebido observando-se que o gráfico da função modular, conforme mostrado na figura 4, tem uma "quina" na origem.

Uma reta tangente ao gráfico da função modular teria que ter coeficiente angular *único* m, dado pelo limite

$$m = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

No entanto, esse limite *não existe*, pela seguinte razão: quando x se aproxima de zero *pela direita*, ou seja, quando x está próximo de zero e é positivo, temos que $|x| = x$ e

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1;$$

quando x se aproxima de zero *pela esquerda*, ou seja, x quando está próximo de zero e é negativo, temos que $|x| = -x$ e

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

Esses dois valores, 1 e -1, correspondem aos coeficientes angulares das semirretas que compõem o gráfico de f.

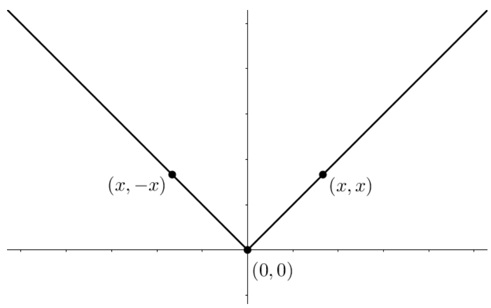

Figura 4: o gráfico da função modular nas proximidades da origem.

Na origem, ponto onde as duas semirretas se encontram, elas não se encaixam suavemente, formando a "quina", mencionada anteriormente, que corresponde à diferença entre os valores de $\frac{|x|}{x}$, para $x > 0$ ou $x < 0$, respectivamente. □

Dicas para o Professor

A presente aula pode ser coberta em dois encontros de 50 minutos cada.

O princípio da exaustão pode ser encontrado em vários módulos do nosso curso. Veja, por exemplo, o *Módulo de Geometria Espacial 2 - Volumes e Áreas de Prismas e Pirâmides*, aula sobre *Volumes e o Princípio de Cavalieri*, Teorema 8. Discutimos ali a Proposição 5 do livro XII dos *Elementos* de Euclides, que trata da comparação entre pirâmides que têm uma mesma altura e bases com mesmas áreas. O uso do Princípio da Exaustão para a demonstração desse resultado é incontornável (veja os comentários no final da referida aula).

Ao abordar a Seção 2, sobre retas tangentes, você pode adotar o ponto de vista puramente geométrico, procurando enfatizar que a reta tangente ocupa uma posição que é limite em relação a um conjunto de retas secantes ou, ainda, em relação às posições de uma reta secante que se move, mas que sempre passa pelo ponto onde procuramos a tangência. Você pode, também, apresentar, mesmo que de modo "embrionário", a definição de limite, fazendo uso das palavras *exigência* e *garantia*, para deixar claro o papel das cotas ε e δ. Também pode ser explorada a *unicidade* do limite, em conexão com a unicidade da reta tangente ao gráfico em um ponto dado.

No Exemplo 4, vimos um caso em que o limite não existe, por isso não há reta tangente. Um outro caso que pode ser explorado é o da *parábola semicúbica*, que é gráfico da função $y = x^{2/3}$.

As sugestões de leituras complementares [1] e [2] são bons textos, sendo a referência [2] mais básica e a referência [1], mais avançada. A referência [3] pode ser consultada para mais aplicações do Método da Exaustão.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo.* Coleção Profmat, SBM, Rio de Janeiro, SBM, 2013.
2. G. Iezzi, O. Dolce, C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol.* 8, quarta edição. São Paulo, Ed. Atual, 1985.
3. A. Caminha, *Geometria.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2014.