Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Algébrica

Introdução à forma polar de um número complexo

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de junho de 2020

Portal da Matemática
OBMEP

1 Interpretação geométrica de complexos

Nesta aula, começamos a buscar interpretações geométricas para o conjunto dos números complexos. Antes disso, vamos lembrar da interpretação geométrica do conjunto dos reais.

1.1 A reta real

É possível fazer uma correspondência entre os números reais e os pontos de uma reta, de modo que cada número real corresponda a um único ponto da reta, e vice-versa. Em uma reta qualquer escolha dois pontos distintos O e U. Vamos assumir que sua reta é horizontal e que o ponto U está à direita de O (ver Figura 1). Identifique o ponto O com o número 0 e o ponto U como número 1, e defina o segmento OU como a unidade de comprimento. Isso estabelece uma orientação e uma escala para a reta, que passa a ser chamada de **reta real**. O ponto O é chamado de **origem** e divide a reta em duas metades (chamadas semirretas). A cada ponto X à direita de O (ou seja, do mesmo lado que U) fazemos corresponder o número real positivo x que representa o comprimento do segmento OX. E do lado esquerdo de O, colocamos os números negativos de maneira simétrica: a cada ponto Y à esquerda de O fazemos corresponder o número $-y$ em que y representa o comprimento de YO.

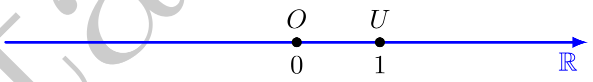


Figura 1: a reta real.

1.2 O plano complexo de Argand-Gauss

No caso dos números complexos, a correspondência é feita com o conjunto de pontos de um plano.

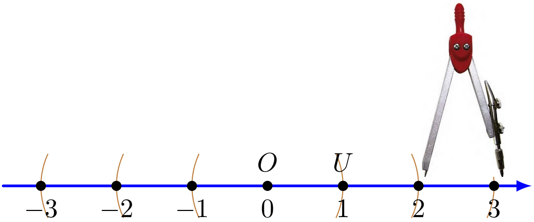


Figura 2: uma maneira prática e precisa de marcar números inteiros na reta real é utilizar um compasso. Fixe a abertura do compasso tomando por base o segmento do ponto 0 ao 1; em seguida, use o compasso para marcar os pontos um a um, partindo de O em ambos os sentidos.

No início do Módulo “Geometria Analítica 1” vimos como atribuir coordenadas (cartesianas) aos pontos de um plano, de modo que cada ponto seja representado por um par ordenado (x, y) de números reais. Mas lembre-se de que cada número complexo, $z \in \mathbb{C}$, possui a forma algébrica $z = x + yi$ onde x e y são números reais. Dessa forma, podemos associar naturalmente o número complexo z ao ponto do plano cartesiano de coordenadas (x, y). Com essa interpretação, cada ponto do plano passa a ser associado a um único número complexo, e vice-versa. Esse plano passa a ser chamado de **plano complexo** ou plano de **Argand-Gauss**. Vejamos como isso é feito em detalhes.

Começamos com a reta real com origem O que, por convenção, é desenhada na horizontal e com sentido positivo para a direita. Essa reta será chamada de eixo real. Traçamos uma reta (vertical) perpendicular ao eixo real e passado por sua origem. Essa reta será chamada de eixo imaginário e é (por convenção) orientada de baixo para cima (ver Figura 3). Nela marcamos os números reais (que irão representar a parte imaginária dos números complexos marcados no plano) usando a mesma escala do eixo real. Finalmente, dado um complexo $z = x + yi$, podemos marcá-lo no plano da seguinte forma: localizamos sua parte real, x, sobre o eixo real e traçamos

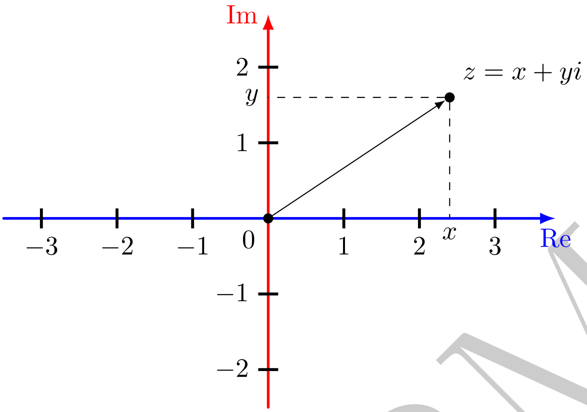


Figura 3: o plano complexo de Argand-Gauss.

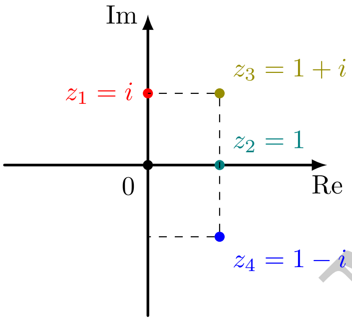
uma reta vertical passando por ele; localizamos sua parte imaginária, y, sobre o eixo imaginário e traçamos uma reta horizontal passando por ele; marcamos z sobre a interseção dessas duas retas. Veja que este é o mesmo ponto que possui coordenadas cartesianas (x, y). O ponto $P = (x, y)$ é chamado de **imagem** ou **afixo** de z no plano de Argand-Gauss. Também podemos associar ao complexo z o vetor $\vec{z} = \overrightarrow{OP}$, que vai da origem ao ponto P.

Veja que um número imaginário puro, da forma bi onde b é um real, é marcado sobre o eixo imaginário no ponto que está a uma distância $|b|$ de O e que está: acima de O quando $b > 0$ e abaixo de O quando $b < 0$.

Exemplo 1. *Represente cada um dos complexos a seguir no plano de Argand-Gauss:* $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 1 - i$.

Solução. O número $z_1 = i$ é imaginário puro e é marcado sobre o eixo imaginário, a uma distância 1 acima do ponto O. O ponto $z_2 = 1$ é real e é marcado sobre o eixo real a uma distância 1 a direita de O. O ponto $z_3 = 1 + i$ tem parte real 1 e parte imaginária 1, logo está na interseção da reta vertical que passa por 1 com a reta horizontal que passa por

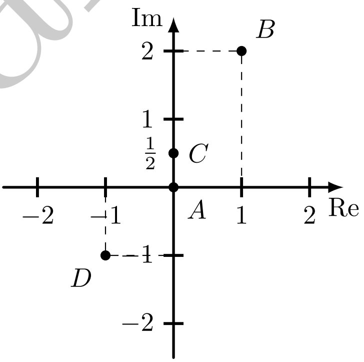
i. Finalmente, o ponto z_4 está na interseção da reta vertical que passa por 1 com a horizontal que passa por $-i$.



$\square$

Observação 2. *No exemplo anterior, o complexo z_4 é o conjugado de z_3. Eles possuem uma mesma parte real, logo, estão sobre uma mesma reta vertical. Além disso, a parte imaginária de um é obtida invertendo o sinal da parte imaginária do outro. O resultado disso é que z_4 é obtido fazendo-se uma reflexão de z_3 em torno do eixo real (como se o eixo real fosse um espelho) e vice-versa. Isso é uma propriedade que vale para qualquer par de conjugados complexos.*

Exemplo 3. *Determine o complexo associado a cada ponto indicado na figura.*



Solução. Temos que:

- $A = (0{,}0)$, logo corresponde ao complexo 0.
(Veja que $0 + 0i = 0$).
- $B = (1, 2)$, logo corresponde ao complexo $1 + 2i$.
- $C = (0, 1/2)$, logo corresponde ao complexo $\frac{1}{2}i$.
- $D = (-1, -1)$, logo corresponde ao complexo $-1 - i$.
(Note que $-i$é o mesmo que $(-1)i$).

□

2 A forma polar ou trigonométrica

Outra maneira de descrever um ponto sobre o plano cartesiano é usando *coordenadas polares*. Neste modelo, para localizar um ponto z no plano usamos duas informações: (i) a distância até a origem e (ii) o ângulo que o segmento de z à origem forma com o eixo real, medido no sentido anti-horário (ver Figura 4). Veja que, conhecendo a distância até a origem, restringimos as possíveis posições do ponto a um círculo com centro na origem e raio igual a tal distância. Já o ângulo indicado em (ii) determina, de maneira única, qual ponto do círculo devemos escolher. Pensando no ponto z como um número complexo, a sua distância até a origem é chamada de *módulo* e é denotada por $|z|$. O ângulo entre o segmento de z até a origem e o eixo real (medido no sentido anti-horário) é chamado de *argumento* de z e denotado por $\arg(z)$. Na Figura 4, o ponto z representa um complexo que possui módulo 2 e argumento 30°. Normalmente, escrevemos o argumento de um complexo em radianos (veja a primeira aula do Módulo "Circulo Trigonométrico"). Neste caso, 30° corresponde a $\pi/3$ radianos. Logo, $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

Vejamos como relacionar a forma algébrica de um número complexo, digamos $z = a + bi$, com seu módulo e argumento. Faremos em detalhes o caso em que z se encontra no primeiro quadrante, ou seja, em que a e b são positivos. O

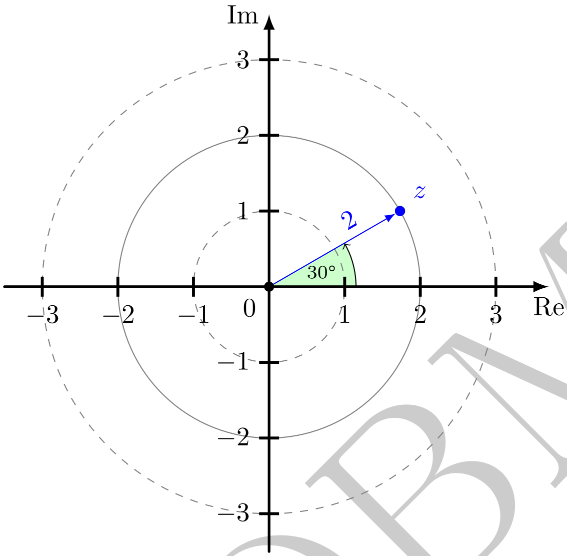


Figura 4: localizando um ponto por meio de coordenadas polares.

triângulo retângulo destacado na próxima figura possui um cateto (horizontal) de comprimento a, um cateto (vertical) de comprimento b e hipotenusa de comprimento denotado por r, com $r = |z|$. Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos que $r^2 = a^2 + b^2$. Como $r > 0$, temos que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Logo,

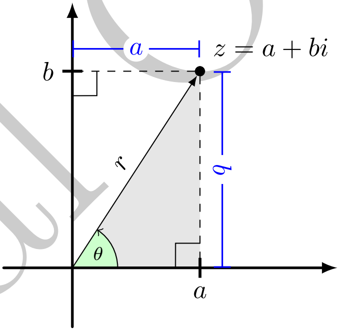
$$z = a + bi \implies |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Por outro lado, fazendo $\theta = \arg(z)$, no mesmo triângulo retângulo temos que $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{r}$ (cateto oposto a θ sobre a hipotenusa) e $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$ (cateto adjacente a θ sobre a hipotenusa). Logo,

$$a = r\cos(\theta) \quad \text{e} \quad b = r\operatorname{sen}(\theta).$$

Assim, z corresponde ao ponto que possui coordenadas cartesianas $(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta))$.

No caso em que z não está no primeiro quadrante, temos que θ não está entre 0 e 90° e, portanto, não existe um triângulo retângulo que possui θ como ângulo. Para este caso, precisamos considerar as definições de seno e cosseno conforme estudadas no Módulo "Círculo Trigonométrico" do Primeiro Ano do Ensino Médio. Lá, aprendemos que um ponto sobre o círculo trigonométrico (que possui raio 1) com argumento θ terá coordenadas cartesianas $(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$. (Os casos em que o ponto se encontra em cada um dos demais quadrantes também são trabalhados em detalhes no Módulo "Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas" do Primeiro Ano, onde estudamos os sinais das funções seno e cosseno). Agora, se substituirmos o círculo de raio 1 por um círculo de raio r, o resultado são coordenadas r vezes maiores, ou seja, $(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta))$, que corresponde ao mesmo resultado obtido no parágrafo anterior para pontos do primeiro quadrante.



Substituindo as expressões $a = r\cos(\theta)$ e $b = r\,\text{sen}(\theta)$ em $z = a + bi$, obtemos $z = r\cos(\theta) + r\,\text{sen}(\theta)\,i$. Colocando r em evidência e lembrando que $r = |z|$, o resultado é o que chamamos de *forma polar* do número complexo:

$$z = r\big(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)\big).$$

A expressão $\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$ é tão frequente no estudo de números complexos que passa a ser abreviada como $\operatorname{cis}(\theta)$ ("cis" é usado a fim de lembrar "cosseno $+\, i$ seno").

$$z = r \operatorname{cis}(\theta).$$

A forma polar é muito útil para simplificar o cálculo de potências de números complexos. No módulo seguinte, a potenciação será estudada em detalhes. Aqui, veremos apenas alguns exemplos.

Exemplo 4. *Seja $z = r \operatorname{cis}(\theta)$. Mostre que $z^2 = r^2 \operatorname{cis}(2\theta)$.*

Solução. Temos que $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Logo,

$$\begin{aligned} z^2 &= \big(r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\big)^2 \\ &= r^2 (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= r^2 (\cos^2\theta + 2i\cos\theta \operatorname{sen}\theta + i^2 \operatorname{sen}^2\theta) \\ &= r^2 (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + i\, 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta). \end{aligned}$$

Aqui é preciso lembrar das fórmulas trigonométricas

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(2\theta) = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta,$$

de onde concluímos que

$$z^2 = r^2\big(\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)\big) = r^2 \operatorname{cis}(2\theta).$$

$\square$

Observação 5. *Uma vez que demonstramos o resultado acima, caso outro dia o leitor não lembre das fórmulas de arco duplo (para os cálculos de $\cos(2\theta)$ e $\operatorname{sen}(2\theta)$), podemos usar o resultado do exemplo anterior para obter essas fórmulas: tomando $r = 1$, partindo de*

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2 = \cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta),$$

expandindo o produto notável do primeiro membro e igualando a parte real de um lado com a parte real do outro, obtemos que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$; por outro lado, igualando as partes imaginárias obtemos que $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta$.

Exemplo 6. *Seja $z = r\operatorname{cis}(\theta)$. Mostre que $z^3 = r^3\operatorname{cis}(3\theta)$.*

Solução. Temos que $z^3 = z^2\,z$. Pelo exemplo anterior, sabemos que $z^2 = r^2\operatorname{cis}(2\theta)$.

Logo, $z^3 = r^2\operatorname{cis}(2\theta)\,r\operatorname{cis}(\theta) = r^3\operatorname{cis}(2\theta)\operatorname{cis}(\theta)$. Para concluir, precisamos demonstrar que $\operatorname{cis}(2\theta)\operatorname{cis}(\theta) = \operatorname{cis}(3\theta)$. Vamos calcular o lado esquerdo usando a propriedade distributiva para expandir

$$\Big(\cos(2\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta)\Big)\Big(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\Big),$$

resultando em:

$$\begin{aligned}
&\Big(\cos(2\theta)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(\theta)\Big) \\
&\qquad\qquad + i\Big(\operatorname{sen}(2\theta)\cos(\theta) + \cos(2\theta)\operatorname{sen}(2\theta)\Big) = \\
&= \cos(2\theta + \theta) + i\operatorname{sen}(2\theta + \theta) \\
&= \cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta) \\
&= \operatorname{cis}(3\theta),
\end{aligned}$$

onde no primeiro passo utilizamos as fórmulas trigonométricas para o cosseno da soma e o seno da soma de dois arcos. □

Exemplo 7. *Considere $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcule z^3.*

Solução. Na aula passada, vimos uma maneira de calcular essa potência expandindo $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ pelo produto notável $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Agora, vejamos uma maneira alternativa, convertendo z para sua forma polar e usando o resultado do Exemplo 6. Vamos calcular o módulo e o argumento de z. Temos que:

$$|z| = r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

Seja $\theta = \arg(z)$. Usando que

$$\frac{1}{2} = a = r\cos(\theta), \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = b = r\operatorname{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad r = 1,$$

temos que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, θ vale $30°$, ou seja, $\pi/3$ radianos e, daí,

$$z = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

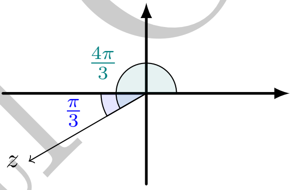
Usando o Exemplo 6, temos que:

$$\begin{aligned} z^3 &= \operatorname{cis}\left(\frac{3 \cdot \pi}{3}\right) = \operatorname{cis}(\pi) \\ &= \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi) \\ &= 0 + i \cdot 1 \\ &= i. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8. *Escreva o complexo* $z = 2\big(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\big)$ *na forma algébrica.*

Solução. (Se necessário revise o módulo "Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas"). O ângulo $4\pi/3$ está no intervalo $[\pi, 3\pi/2]$, logo, pertence ao terceiro quadrante (ver figura abaixo).



Como $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, segue que:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$z = 2\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

□

Exemplo 9. *Determine a área do triângulo cujos vértices são as imagens (no plano complexo) das raízes da equação* $z^3 + z^2 + z = 0$.

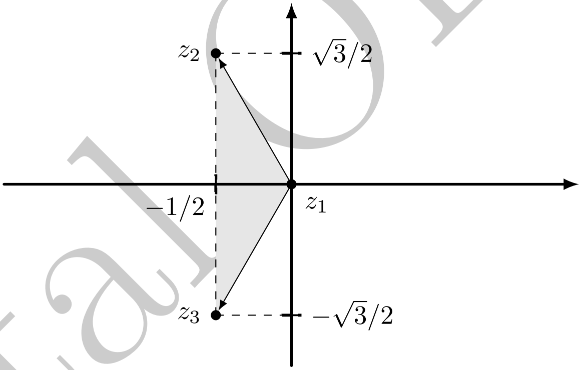
Solução. Colocando z em evidência, temos que a equação equivale a:

$$z(z^2 + z + 1) = 0.$$

Com isso, $z = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$. Resolvendo a última equação de segundo grau, temos: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, logo,

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Resumindo, temos que as três raízes da equação são $z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. As posições das três imagens desses complexos são indicadas no plano Argand-Gauss da figura a seguir. O enunciado nos pede para calcular a área do triângulo realçado.



Este triângulo é isósceles com base z_2z_3, de comprimento $\sqrt{3}$, e tal que a altura relativa a esta base é um segmento (contido no eixo real) de comprimento $1/2$. Logo, a área do triângulo é (metade do produto do comprimenot da base pelo da altura):

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

□

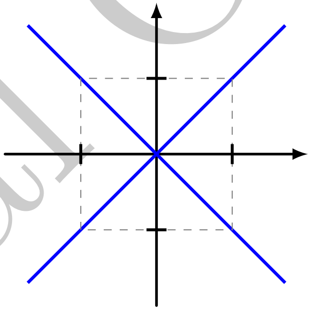
Exemplo 10. *Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que z^2 é um imaginário puro. Observação: lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos de um plano que satisfazem uma condição estipulada.*

Solução. Se $z = a + bi$, então

$$z^2 = a^2 + 2abi + b^2\, i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

Este número é um imaginário puro se, e somente se, sua parte real for igual a zero, ou seja, $a^2 - b^2 = 0$. Isso equivale a $a^2 = b^2$, ou seja, $a = b$ ou $b = -a$.

Assim, a imagem de z é um ponto no plano com coordenadas (a, b) tais que $b = a$ ou $b = -a$. Os pontos que satisfazem $b = a$ são aqueles que estão sobre a reta $y = x$ do plano cartesiano; essa é reta que passa pelos pontos (0,0) e (1,1). Por outro lado, os pontos que satisfazem $b = -a$ são aqueles que estão sobre a reta $y = -x$, que passa pelos pontos (0,0) e $(1, -1)$. O lugar geométrico desejado pelo enunciado é, portanto, a união dessas duas retas (representadas em azul na figura).



□

Dicas para o Professor

O conteúdo desta aula pode ser coberto em um encontro de 50 min, sem contar o tempo de revisão dos pré-requisitos. Pode ser necessário revisar alguns conteúdos dos módulos de trigonometria, em especial, as definições de seno e cosseno no círculos trigonométrico e as fórmulas para seno e cosseno da soma de dois arcos e do dobro de um arco.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.