Material Teórico - Módulo de Frações, O Primeiro Contato

Frações e Suas Operações - Parte 2

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Ulisses Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha

26 de setembro de 2025

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

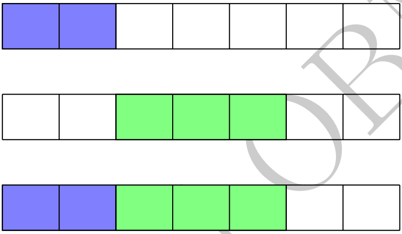
Neste material, continuamos o estudo das frações, introduzindo a primeira das suas operações aritméticas, que é a adição.

1 Adição de frações

Iniciamos com o seguinte

Exemplo 1. *Gabi e Nando ganharam uma barra de chocolate de seu pai. Gabi comeu $\frac{2}{7}$ e Nando comeu $\frac{3}{7}$ da barra. Que fração da barra os dois comeram juntos?*

Solução. Observe a figura, onde estão representadas a barra, dividida em sete partes iguais, e as frações comidas pelos irmãos.



$= \frac{2}{7}$

$= \frac{3}{7}$

$= \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

Na barra de cima, estão pintadas de azul duas das sete partes, representando os $\frac{2}{7}$ da barra comidos por Gabi. Na barra do meio, estão pintadas de verde três das sete partes, representando os $\frac{3}{7}$ da barra comidos por Nando. Finalmente, na barra de baixo, juntamos as partes comidas por Gabi e Nando, totalizando cinco das sete partes da barra. Portanto,

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7},$$

ou seja, Gabi e Nando comeram, juntos, $\frac{5}{7}$ da barra de chocolate. $\square$

De modo geral, quando as frações têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo:

Adição de frações com um mesmo denominador: a soma de duas frações que têm um mesmo denominador é a fração cujo numerador é a soma dos numeradores das duas frações e cujo denominador é o mesmo denominador (comum) das duas frações.

Em símbolos, podemos reescrever a regra acima da seguinte forma:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Para exercitar, vejamos mais alguns exemplos:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}.$$

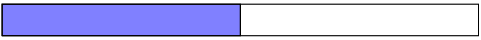
$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4+1}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

$$\frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{1+4}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

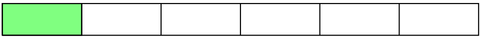
Vejamos, agora, três exemplos iniciais ilustrando como somar frações com denominadores diferentes.

Exemplo 2. *Joaquim tinha de fazer um trabalho de revisão textual durante o fim de semana. Ele fez $\frac{1}{2}$ do trabalho no sábado. No domingo, como tinha um almoço agendado com sua mãe, Joaquim conseguiu fazer apenas mais $\frac{1}{6}$ do trabalho. Que fração do trabalho de revisão Joaquim conseguiu fazer durante o fim de semana?*

Solução. Representando todo o trabalho de revisão a ser realizado por uma barra, dividindo essa barra em 2 partes iguais e tomando uma dessas partes, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{2}$, correspondendo à parte do trabalho realizado por Joaquim no sábado.

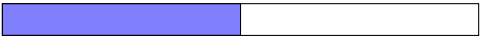
 $= \frac{1}{2}$

Dividindo essa mesma barra em seis partes iguais e tomando uma dessas partes, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{6}$, correspondendo à parte do trabalho realizado por Joaquim no domingo.

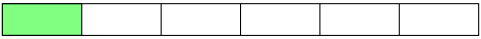


$= \frac{1}{6}$

A ideia é, então, calcular a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ para obter a fração do trabalho de revisão realizado durante o fim de semana:



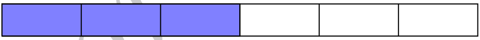
$= \frac{1}{2}$



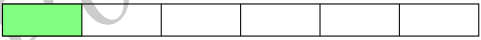
$= \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = ?$

Como essas frações não têm um mesmo denominador, a ideia é encontrar frações equivalentes a cada uma delas mas que possuam um mesmo denominador, para, em seguida, somar as frações. Para isso, vamos dividir cada metade da barra de cima (que representa a fração $\frac{1}{2}$) em três partes iguais. Assim fazendo, a barra ficará dividida em seis partes; a parte pintada de azul corresponde a três dessas partes, ou seja, pode ser representada pela fração $\frac{3}{6}$. Somar as duas frações é, agora, fácil, uma vez que elas têm um mesmo denominador:



$= \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$



$= \frac{1}{6}$

$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

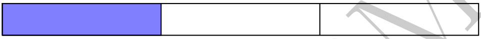
Portanto,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3},$$

ou seja, Joaquim realizou $\frac{2}{3}$ do trabalho de revisão durante o fim de semana. □

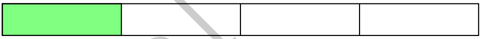
Exemplo 3. *A professora Abigail presenteou as alunas Maria e Clara, medalhistas em uma olimpíada de Matemática, com alguns chocolates que estavam em uma caixa. Ela decidiu que Maria, por ter conquistado uma medalha de ouro, ficaria com um terço dos chocolates da caixa e Clara, por ter conquistado uma medalha de prata, ficaria com um quarto dos chocolates da caixa. Que fração representa a quantidade de chocolates que Maria e Clara receberam, juntas?*

Solução. Vamos representar o total de chocolates contidos na caixa por uma barra. Dividindo essa barra em três partes iguais e tomando uma dessas partes, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{3}$, correspondente à parte dos chocolates que coube a Maria.



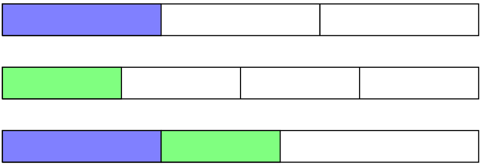
$= \frac{1}{3}$

Analogamente, dividindo a mesma barra em quatro partes iguais e tomando uma dessas partes, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{4}$, a parte dos chocolates que coube a Clara.



$= \frac{1}{4}$

Para encontrar a fração da caixa que Maria e Clara receberam juntas, devemos somar as frações correspondentes às quantidades de chocolates recebidos pelas duas colegas. Observe a figura abaixo, onde estão representadas as frações da caixa de chocolates recebidas por Maria e Clara separadamente, bem como a fração que representa o total de chocolates recebidos pelas duas juntas.

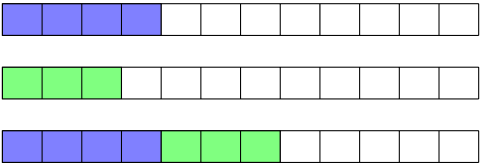


$= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$

Como as barras (que representam a caixa de chocolates) não foram divididas na mesma quantidade de partes nas duas figuras, não podemos somar diretamente as frações. Entretanto, poderemos fazer isso se subdividirmos cada uma das três partes da primeira barra em quatro partes iguais e cada uma das quatro partes da segunda barra em três partes iguais; acompanhe na próxima representação:



Desse modo, obtivemos as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$, sendo a primeira equivalente a $\frac{1}{3}$ e a segunda equivalente a $\frac{1}{4}$. Assim, para somar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, somamos as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$, que são respectivamente equivalentes às duas primeiras:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Portanto, a fração que corresponde à quantidade de chocolates recebidos por Maria e Clara, juntas, é $\frac{7}{12}$. $\square$

Exemplo 4. *Em um passeio ciclístico, os participantes percorreram $\frac{1}{4}$ do percurso na primeira hora, $\frac{2}{5}$ do percurso na segunda hora. Que fração do percurso total do passeio foi percorrida nas duas primeiras horas?*

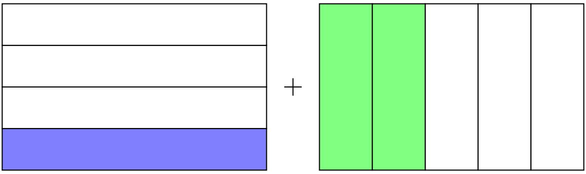
(*a*) $\frac{3}{9}$.

(*b*) $\frac{13}{20}$.

(*c*) $\frac{3}{20}$.

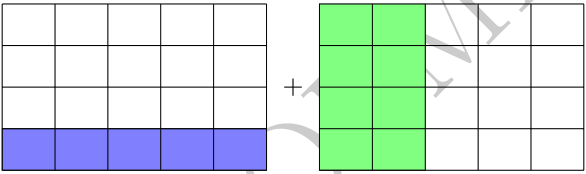
(*d*) $\frac{9}{13}$.

Solução. Precisamos somar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, uma vez que elas são as frações do percurso que foram percorridas na primeira e na segunda horas, respectivamente. Observe a figura a seguir, que representa a soma das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$:

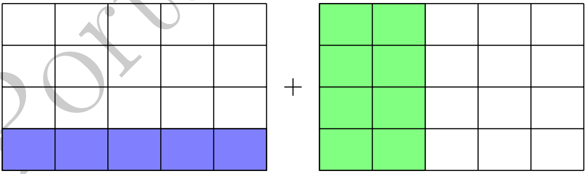


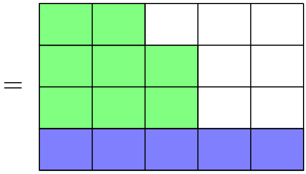
Note que não há como somar diretamente as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, pois o retângulo, que representa todo o percurso percorrido pelos ciclistas, foi dividido em 4 partes na figura da esquerda e em 5 partes na figura da direita.

Entretanto, podemos representar as mesmas frações que foram representadas acima subdividindo cada $\frac{1}{4}$ da figura da esquerda em 5 partes iguais e cada $\frac{1}{5}$ da figura da direita em 4 partes iguais:



Agora, observe que as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{20}$ são **equivalentes**, bem como as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{8}{20}$. Além disso, é fácil somar $\frac{5}{20}$ e $\frac{8}{20}$, pois são frações de um inteiro que foi dividido em uma mesma quantidade de partes:





Logo,

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20}.$$

□

De modo geral, quando as frações que queremos somar não têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo:

> **Adição de frações com denominadores diferentes:** para realizar a soma de duas frações que têm denominadores diferentes, procedemos em duas etapas: (1) encontramos duas frações que possuam um mesmo denominador e que sejam equivalentes às frações que desejamos somar; (2) somamos as frações equivalentes (que, agora, têm denominadores iguais), somando seus numeradores.

Observe que, para executar a etapa (1) acima, precisamos trocar as frações originais por *frações equivalentes a elas e que possuam um mesmo denominador*. Em símbolos,

$$\text{trocamos } \frac{a}{b}+\frac{c}{d} \text{ por } \frac{a\times k}{b\times k}+\frac{c\times l}{d\times l},$$

com $a\times k=d\times l$. Como $a\times k$ é múltiplo de a e $d\times l$ é múltiplo de l, o que queremos é que o denominador comum das frações equivalentes seja um múltiplo dos denominadores das frações originais.

Esse múltiplo comum pode ser o mmc ou o produto dos denominadores das frações originais, e foi exatamente o que fizemos nos exemplos anteriores:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{1\times 1}{6\times 1}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

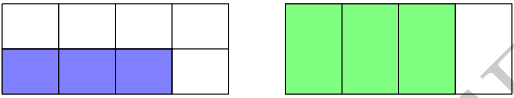
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 4}{3\times 4}+\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$$

e

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{5+8}{20}=\frac{13}{20}.$$

Nosso último exemplo traz uma dificuldade de outra natureza.

Exemplo 5. *As frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{4}$ estão representadas nos retângulos a seguir.*

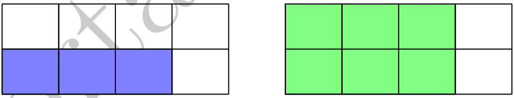


(*a*) *Divida o retângulo da direita em partes menores, de modo que seja possível escrever as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{4}$ com o mesmo denominador.*

(*b*) *Some as frações equivalentes que foram encontradas no item anterior.*

(*c*) *Apenas um retângulo será suficiente para representar a fração que é o resultado da adição das frações $\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$? Justifique a sua resposta.*

Solução. Para o item (a), veja a figura abaixo.

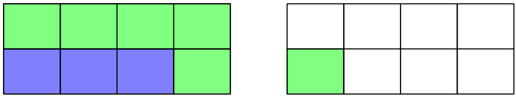


Desse modo, obtemos

$$\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=\frac{3}{8}+\frac{6}{8}=\frac{9}{8},$$

que é a resposta para o item (b).

Por fim, a um retângulo inteiro dividido em 8 partes corresponde a fração $\frac{8}{8}$. Como a fração $\frac{9}{8}$ é igual a $\frac{8}{8}+\frac{1}{8}$, um retângulo não é suficiente para representar a soma das frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{4}$. De fato, necessitamos de um retângulo inteiro e $\frac{1}{8}$ de um segundo retângulo. Veja a figura a seguir:



$\square$

Sugestões para o Professor

Como estratégia didática, apresentamos a adição de frações a partir da resolução de problemas. Especialmente no caso de frações com denominadores diferentes, essa é uma boa estratégia, uma vez que permite colocar naturalmente a ideia de tomar frações equivalentes às originais, mas com denominadores iguais.

Observe que, no sexto ano, uma parte razoável dos estudantes ainda pode ter dificuldades com o uso de letras para representar números. Por isso, deve-se evitar começar a explicar a adição de frações escrevendo expressões como $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ ou $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+b\times c}{b\times d}$.

Um encontro de 50 minutos deve ser suficiente para cobrir o conteúdo deste material.