Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1

Ângulos

Oitavo Ano

Prof. Ulisses Lima Parente

Portal da Matemática
OBMEP

1 Ângulos

Uma região $\mathcal{R}$ do plano é **convexa** se dados quaisquer dois pontos $A, B \in \mathcal{R}$, tivermos $\overline{AB} \subset \mathcal{R}$. Caso existam pontos $A, B \in \mathcal{R}$ tais que o segmento de reta $\overline{AB}$ não está inteiramente contido em $\mathcal{R}$, diremos que a região $\mathcal{R}$ é **não convexa**. Na figura abaixo, temos uma região convexa à esquerda e uma região não convexa à direita.

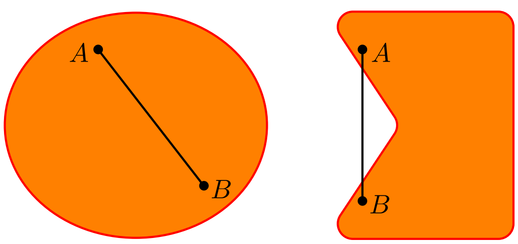

Figura 1: regiões convexa e não convexa.

No plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, de mesma origem O e não opostas, determinam duas regiões, exatamente uma das quais é convexa. Definimos o **ângulo** (ou **ângulo convexo**) $\angle AOB$ como a região convexa do plano delimitada por $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. O ponto O é denominado o **vértice** e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os **lados** do ângulo $\angle AOB$.

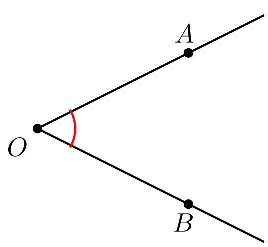

Figura 2: ângulo no plano.

Se $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ forem semirretas opostas, então as regiões em que o plano fica dividido por $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os dois semiplanos definidos pela reta $\overleftrightarrow{AB}$. Nesse caso, em princípio o **ângulo** $\angle AOB$ poderia ser definido como uma qualquer dessas duas regiões. Porém, se quisermos evitar ambiguidades, podemos marcar um ponto adicional X em um dos dois semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$ e referirmo-nos ao *ângulo* $\angle AOB$ *que contém o ponto* X.

Ainda no contexto de um ângulo $\angle AOB$, trace um círculo qualquer Λ (lê-se *Lâmbda*) de centro O e o divida em 360 arcos iguais. Se os pontos A e B forem as extremidades de um desses 360 arcos, dizemos que a **medida** de $\angle AOB$ é 1 **grau**, e denotamos

$$A\widehat{O}B = 1^{\circ}.$$

Como um ângulo de 1° corresponde a um arco que mede $\frac{1}{360}$ do círculo Λ, temos que o círculo completo corresponde a 360°. Daí, por exemplo, se o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ é $\frac{1}{8}$ do comprimeto de Λ, então a medida de $\angle AOB$ será

$$A\widehat{O}B = \frac{1}{8} \cdot 360^{\circ} = 45^{\circ}.$$

Veja a figura 3.

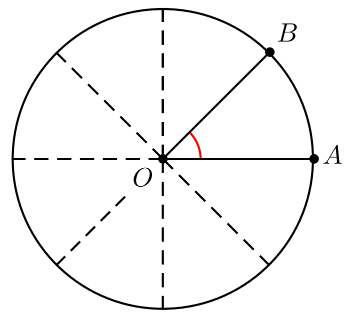

Figura 3: um ângulo $\angle AOB$ de 45°.

Se o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é $\frac{1}{4}$ do comprimento do círculo completo, então temos um ângulo $\angle AOB$ cuja medida é $A\widehat{O}B = \frac{1}{4} \cdot 360^{\circ} = 90^{\circ}$. Um ângulo que mede 90° também é chamado de **ângulo reto**.

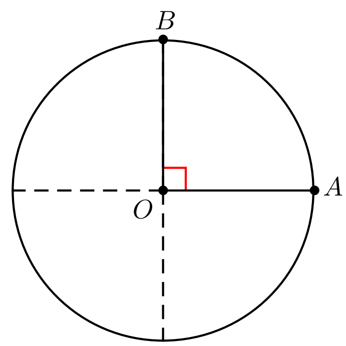

Figura 4: um ângulo reto.

Seguindo o mesmo raciocínio aplicado nos dois casos acima, se o segmento de reta $\overline{AB}$ é um diâmetro de Λ, então, tendo em vista que os extremos de um diâmetro dividem o círculo em dois arcos de mesmo comprimento, concluímos que o ângulo $\angle AOB$ mede $\frac{1}{2} \cdot 360^{\circ} = 180^{\circ}$. Um ângulo que mede 180° é chamado de **ângulo raso**.

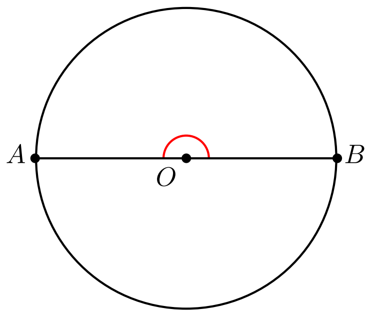

Figura 5: um ângulo raso.

Dizemos que dois ângulos são **congruentes** (ou **iguais**) se suas medidas forem iguais.

Doravante, sempre que for conveniente, utilizaremos as letras gregas minúsculas α, β, θ, etc. para representar medidas de ângulos.

Um ângulo $\angle AOB$ de medida $A\widehat{O}B = \alpha$ é dito **agudo** se $0 < \alpha < 90^o$ e **obtuso** se $90^o < \alpha < 180^o$. As figuras 6 e 7 ilustram ângulos $\angle AOB$ que são respectivamente agudo e obtuso.

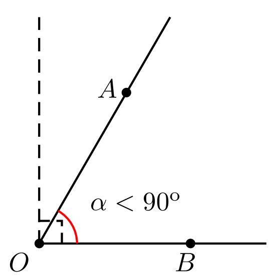

Figura 6: um ângulo agudo $\angle AOB$.

2 Ângulos consecutivos, adjacentes, complementares e suplementares.

Dizemos que dois ângulos são **consecutivos** se possuem um lado em comum. Por exemplo, na figura 8, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são consecutivos.

Observe, contudo, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ da figura 8, apesar de consecutivos, não possuem apenas uma semirreta em comum. De fato, neste caso, temos $\angle BOC \subset$

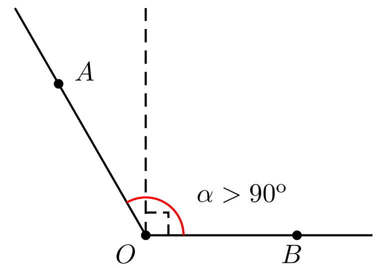

Figura 7: um ângulo obtuso.

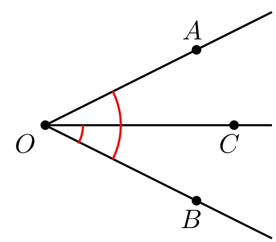

Figura 8: ângulos consecutivos.

$\angle AOB$. Quando dois ângulos consecutivos possuírem apenas uma semirreta em comum, eles serão chamados de ângulos **adjacentes**. Assim, por exemplo, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ da figura 9 são (consecutivos e) adjacentes.

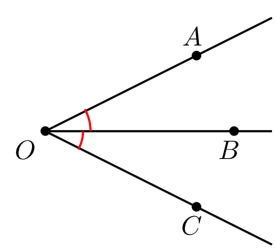

Figura 9: dois ângulos adjacentes.

Dois ângulos de medidas α e β são **complementares** se $\alpha + \beta = 90^o$ e **suplementares** se $\alpha + \beta = 180^o$. Em palavras, a soma das medidas de dois ângulos complementares é igual à medida de um ângulo reto, ao passo que a soma das medidas de dois ângulos suplementares é igual à medida de um ângulo raso.

Na figura 10, por exemplo, os ângulos adjacentes $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são, claramente, complementares.

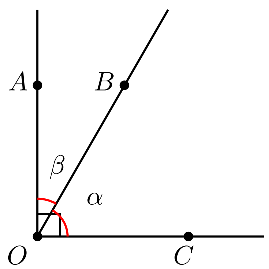

Figura 10: ângulos adjacentes complementares.

Por outro lado, a figura 11 mostra ângulos (também adjacentes) $\angle AOB$ e $\angle BOC$ que são suplementares.

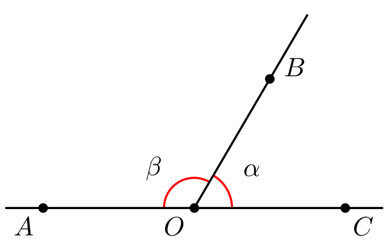

Figura 11: ângulos adjacentes suplementares.

3 Ângulos opostos pelo vértice, bissetriz de um ângulo

Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$, que possuem o mesmo vértice O, são **opostos pelo vértice** (abreviamos **OPV**) se seus lados forem pares de semirretas opostas. Assim, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ da figura 12, haja vista que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são semirretas opostas, o mesmo ocorrendo com as semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$.

Observando a figura 12, concluímos que, uma vez que as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são opostas, o ângulo $\angle AOC$ é raso. Desse modo, os ângulos adjacentes $\angle AOD$ e $\angle DOC$ são suplementares. Daí, segue que

$$\gamma + \beta = 180^{\text{o}}.$$

De modo análogo, os ângulos adjacentes $\angle DOA$ e $\angle AOB$

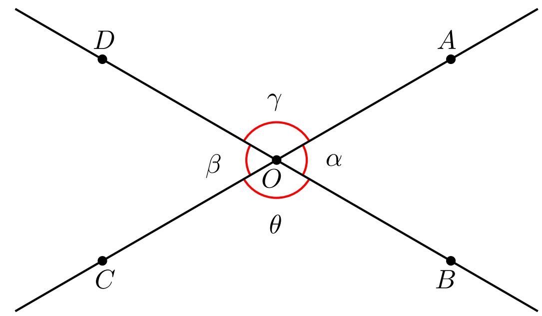

Figura 12: ângulos opostos pelo vértice.

também são suplementares, de forma que

$$\gamma + \alpha = 180^{\text{o}}.$$

Em particular, concluímos que $\gamma + \beta = \gamma + \alpha$ e, então, que

$$\beta = \alpha.$$

Analogamente, como $\angle AOD$ e $\angle BOC$ também são OPV, temos que $\gamma = \theta$.

Em palavras, mostramos a seguinte propriedade importante de ângulos OPV:

ângulos OPV possuem medidas iguais.

A **bissetriz** de um ângulo $\angle AOB$ é uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ que divide $\angle AOB$ em dois ângulos de medidas iguais. Nas notações da figura 13, supondo que $A\widehat{O}C = B\widehat{O}C = \alpha$, temos que $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $\angle AOB$.

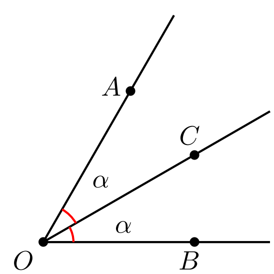

Figura 13: a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

O exemplo a seguir relaciona as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice.

Exemplo 1. *Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semirretas opostas.*

Prova. Nas notações da figura 14, sejam $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ as bissetrizes dos ângulos opostos pelo vértice $\angle AOB$ e $\angle COD$ (observe que tal figura já utiliza a igualdade das medidas de ângulos OPV).

Então, por um lado, temos

$$X\widehat{O}A + A\widehat{O}D + D\widehat{O}Y = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma.$$

Por outro, temos claramente $2\alpha + 2\gamma = 360°$, de forma que $\alpha + \gamma = 180°$. Então, $\angle XOY$ é um ângulo raso, de forma que $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ são, realmente, semirretas opostas. $\square$

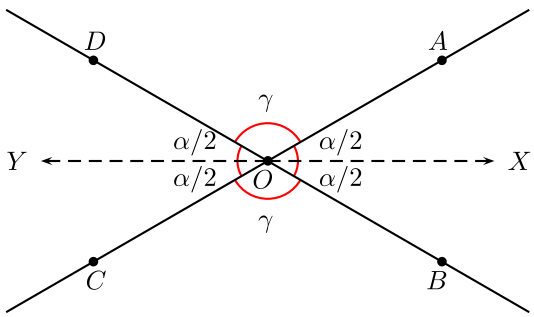

Figura 14: bissetrizes de dois ângulos OPV.

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para a primeira seção que compõe esse material, e uma seção adicional de 50min para as outras duas seções. Na seção 1, procure destacar os conceitos de região convexa e não convexa, para que o conceito de ângulo convexo seja bem entendido. Na seção 2, utilize desenhos para ilustrar que a união de dois ângulos adjacentes e complementares forma um ângulo reto, enquanto a união de dois ângulos adjacentes e suplementares forma um ângulo raso. Finalmente, na seção 3, é muito importante que os alunos compreendam que ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida. Esse fato será utilizado várias vezes em aulas posteriores.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. A. Caminha. *Geometria.* Rio de Janeiro, SBM, 2013.

3. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2012.