Material Teórico - Módulo O Plano Cartesiano e Sistemas de Equações

O Plano Cartesiano

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Neste módulo apresentaremos uma importante ferramenta matemática que se mostrará útil em diversas situações. Trata-se do *plano cartesiano*, em homenagem ao matemático e filósofo frânces René Descartes (1596-1650), responsável pela criação e divulgação do método que, hoje, conhecemos como *Geometria Analítica*.

Iniciaremos a discussão dessa aula apresentando uma situação prática: João recebe todos os meses em sua casa a fatura da conta de água. Ele sabe que, quanto mais água consumir, maior será o valor da conta a ser paga. Porém, ele não sabe qual é a relação exata entre essas duas variáveis: *consumo* e *valor da conta*. Para descobri-la, ele montou uma tabela na qual escreveu os valores relevantes para sua análise. O resultado foi o seguinte:

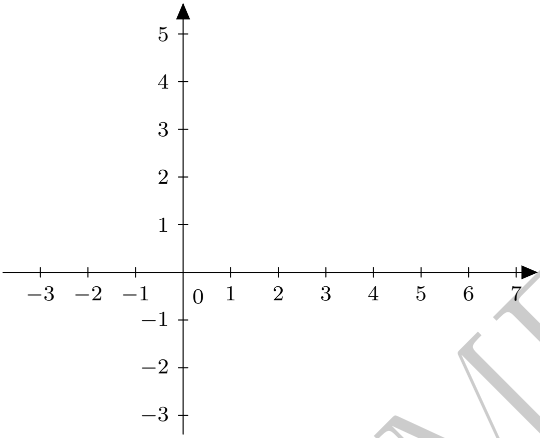
Tabela 1: Consumo de água na casa do João.

Mês	**Consumo (m^3)**	**Valor da conta**
Janeiro	2	7 reais
Fevereiro	1	5 reais
Março	3	9 reais

Agora, nosso objetivo será tentar "visualizar" a relação entre as variáveis acima. Para tanto, faremos um desenho conhecido como o *plano cartesiano*, que servirá como base para todo o módulo.

2 O plano cartesiano

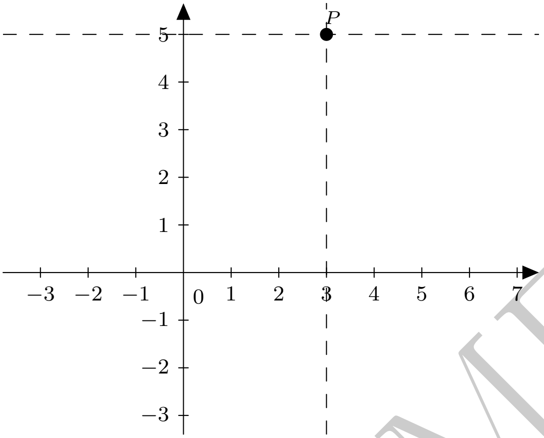
O primeiro passo é desenhar duas retas perpendiculares no plano do papel. A reta horizontal será chamada de "eixo x" e a reta vertical de "eixo y" (localize tais retas na figura a seguir):



Em seguida, marcamos pontos equidistantes ao longo de cada uma dessas retas (veja, novamente, a figura acima). Então, os números inteiros positivos devem ser colocados, na ordem usual, na parte direita da reta horizontal e na parte de cima da reta vertical, ao passo que os números inteiros negativos deve ser colocados, na ordem usual, na parte esquerda da reta horizontal e na parte de baixo da reta vertical.

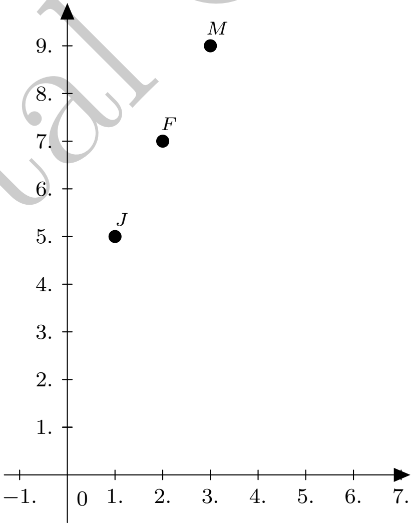
Dessa forma, podemos representar cada ponto do plano como um par de informações $P(x, y)$, que será chamado de **par ordenado**. O primeiro valor desse par é chamado de **abscissa**, e representa a quantidade relativa à primeira variável. O segundo valor desse par é chamado de **ordenada**, e representa a quantidade relativa à segunda variável. Juntas, as variáveis x e y são chamadas de **coordenadas** do ponto P[1]. Por exemplo, o ponto $(3, 5)$ representa uma situação em que temos cinco objetos referentes à primeira variável e três referentes à segunda. Esse ponto deverá estar situado no encontro entre a reta que é paralela ao eixo y e passa pelo ponto 3 do eixo x, com a reta que é paralela ao eixo x e passa pelo ponto 5 do eixo y (veja a próxima figura).

[1] Nesse caso, x é a **primeira coordenada** e y é a **segunda coordenada de P.**



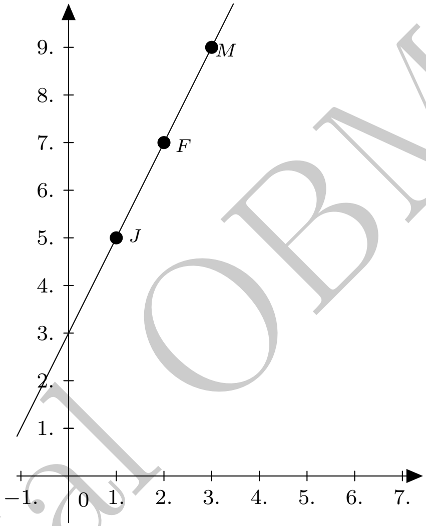
Um **plano cartesiano**, também chamado **plano coordenado**, é exatamente a introdução de coordenadas em um plano, feita como acima.

De forma similar, podemos colocar desenhar três pontos no plano cartesiano, cada um representado um mês da tabela feita pelo João.



A coordenada x será utilizada para guardar as informações relativas ao consumo de água em metros cúbicos, enquanto que a coordenada y será utilizada para guardar as informações relativas ao valor total da conta. Fazemos isso na próxima figura.

Podemos constatar que os três pontos estão sobre uma mesma reta, i.e., eles são **colineares**. Traçando-se a reta que os liga pontos, podemos perceber mais facilmente a relação que existe entre as variáveis x e y.



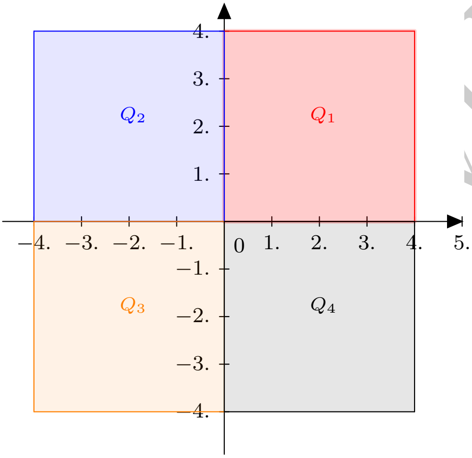
Mais precisamente, podemos perceber que:

- O valor de y é igual a 3 quando x é igual a zero. Isso significa que, ainda que João não consuma água alguma em um certo mês, mesmo assim terá que pagar três reais. Provavelmente, esse valor corresponde à taxa de manutenção do sistema de fornecimento de água.

- Quando o valor de x aumenta em uma unidade, o valor de y aumenta em duas unidades.

Dessa forma, a relação $y = 2x + 3$ representa a correspondência entre as variáveis *consumo* e *valor da conta*. Chamamos essa relação de **linear**, uma vez que ela é representada por um conjunto de pontos colineares.

Voltando ao desenvolvimento da teoria, apresentaremos agora algumas definições importantes relacionadas ao plano cartesiano. Tal plano pode ser dividido em quatro regiões, conhecidas como seus **quadrantes** e que podem ser visualizadas na figura a seguir:



Em palavras, o primeiro quadrante é formado por todos os pontos cujas coordenadas são não negativas; o segundo quadrante, por todos os pontos cuja coordenada x é não positiva e cuja coordenada y é não negativa; por sua vez, o terceiro quadrante é formado por todos os pontos cujas coordenadas são ambas não-positivas; por fim, o quarto quadrante é composto por todos os pontos cuja coordenada x é não negativa e cuja coordenada y é não positiva. Em termos algébricos:

$$Q_1 = \{(x, y)|x, y \geq 0\},$$
$$Q_2 = \{(x, y)|x \leq 0, y \geq 0\},$$
$$Q_3 = \{(x, y)|x, y \leq 0\},$$
$$Q_4 = \{(x, y)|x \geq 0, y \leq 0\}.$$

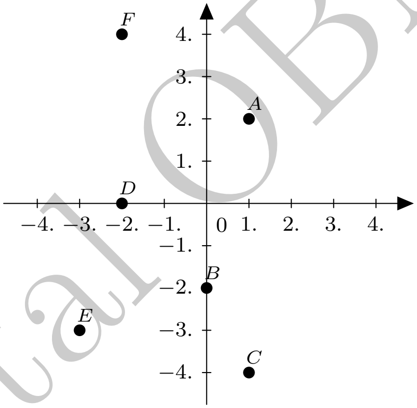
O quadro a seguir resume as definições dos quadrantes do plano cartesiano:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
x	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$

Agora, resolveremos alguns exercícios para fixar o que foi aprendido até o momento.

Exercício 1. *Marque os seguintes pontos no plano cartesiano:* $A(1,2)$, $B(0,-2)$, $C(1,-4)$, $D(-2,0)$, $E(-3,-3)$ *e* $F = (-2,4)$.

Solução. Veja a figura a seguir. $\square$



Exercício 2. *Considere a relação entre as variáveis* x *e* y, *dada por* $y = -2x + 4$. *Responda os itens a seguir:*

(a) *Se* $x = 1$, *qual será o valor de* y*?*

(b) *Se* $y = 4$, *qual será o valor de* x*?*

(c) *Se* $y = 7$, *qual será o valor de* x*?*

Solução.

(a) Substituindo $x = 1$ na relação dada, obtemos

$$y = -2 \cdot 1 + 4 = 2.$$

(b) Substituindo $y = 4$, temos

$$4 = -2x + 4 \Rightarrow x = 0.$$

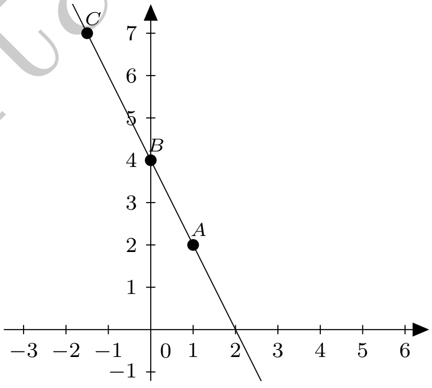
(c) Substituindo $y = 7$, segue que

$$7 = -2x + 4 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

$\square$

Exercício 3. *Marque os pontos (x, y) obtidos em cada um dos itens do exercício anterior em um plano cartesiano. Em seguida, verifique visualmente que eles são colineares e trace a reta que os une.*

Solução. Os pontos a serem considerados são $(1, 2)$, $(0, 4)$ e $(-\frac{3}{2}, 7)$. No plano cartesiano, esses pontos podem ser representados de acordo com a figura a seguir, a partir da qual vemos que, aparentemente, eles realmente são colineares. Na dita figura, traçamos também a reta que passa por tais pontos, observando que ela também passa pelo ponto $(2, 0)$. $\square$



3 Eixos com escalas diferentes

Por vezes, é comum acharmos relações lineares entre duas variáveis que têm ordens de grandeza distintas. Por exemplo, em um certo bairro de uma certa cidade, podemos relacionar o tamanho da área construída de uma casa com seu preço em reais, da seguinte forma:

$$y = 2000x + 20.000,$$

onde y é o preço da casa em reais e x é a área total construída, medida em metros quadrados. Veja que podemos calcular o preço de uma casa hipotética a partir dessa equação. Observemos alguns exemplos:

- Se $x = 50$, então $y = 120.000$.
- Se $x = 60$, então $y = 140.000$.
- Se $x = 90$, então $y = 200.000$.

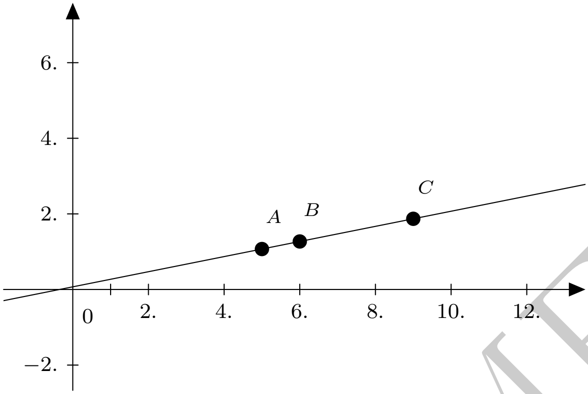
Observe que se quisermos marcar os pontos $(50, 120.000)$, $(60, 140.000)$ e $(90, 200.000)$ no plano cartesiano, exatamente como vínhamos fazendo até então, obteríamos, pela disparidade entre as grandezas dos números relativos a metros quadrados e preços, uma figura distorcida e de difícil entendimento. Por isso, nesses casos utilizamos gráficos com *escalas diferentes*.

Para esse exemplo especificamente, podemos utilizar a escala

$$(x : y) = (10 : 100.000),$$

a qual significa que se um espaçamento de uma unidade ao longo do eixo x significar 10 metros quadrados, então o espaçamento correspondente (i.e., também de uma unidade) ao longo do eixo y significará 100.000 reais.

Assim fazendo, vejamos como fica o gráfico da relação entre as variáveis x (a metragem construída) e y (o preço da casa):



Observe que, graças à escala utilizada, os pontos do gráfico correspondentes ao valores exemplificados acima são marcados como os pontos $(5; 1,2)$, $(6; 1,4)$ e $(9; 2)$.

4 Sugestões ao professor

Sugerimos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cada para abordar os assuntos deste material. No primeiro encontro, apresente o plano cartesiano e resolva alguns exercícios; certifique-se de que os alunos saiam dele entendendo como representar pontos específicos no plano. No segundo encontro, introduza relações lineares entre duas grandezas e mostre como achar pontos que resolvem uma equação linear do tipo $y = ax + b$.

Recomendamos que o professor utilize algum software para ensino de Geometria Analítica, como por exemplo o `Geogebra`, que é distribuido gratuitamente no site

`https://www.geogebra.org/`

Este software foi utilizado para criar as ilustrações deste material.