

Material Teórico - Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem

Combinações Completas

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto



1 Combinações Completas

Em aulas anteriores, estudamos o conceito de “combinações”, quando definimos que $C_{n,r}$ é o número de maneiras de escolher r objetos distintos dentre um conjunto de n objetos distintos. Vimos também que podemos escrever $C_{n,r} = \binom{n}{r}$. Agora, iremos estudar o conceito de *combinações completas*, também denominadas *combinações com elementos repetidos*. Vejamos:

Dado um conjunto de n objetos (distintos), o número de maneiras de escolher r dentre eles, onde podemos escolher várias vezes o mesmo elemento e de forma que a ordem em que os r elementos são escolhidos não é importante, é chamado de número de combinações completas de n escolhe r , sendo denotado por $CR_{n,r}$.

Nosso objetivo é descobrir como calcular o valor de $CR_{n,r}$; note que, aqui, a única restrição é que n e r sejam inteiros não negativos. No caso de combinações simples, o valor de $C_{n,r}$ só é um número positivo quando $r \leq n$. Contudo, o valor de $CR_{n,r}$ será positivo para quaisquer valores (inteiros) não negativos de n e r . Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. *Uma loja possui duas caixas, cada uma com um grande número de bolinhas. Uma caixa tem somente bolinhas azuis e a outra tem somente bolinhas verdes, sendo que as bolinhas de uma mesma caixa são todas idênticas. Queremos comprar 6 bolinhas para montar um saquinho de presentes. De quantas maneiras isso pode ser feito, observando-se que a ordem em que as bolinhas são colocadas no saquinho é irrelevante?*

Solução. Assuma que temos pelo menos 6 bolinhas de cada cor (já que cada caixa possui um número grande de bolinhas). Assim não precisamos nos preocupar se é possível terminar de montar um saquinho. Há apenas dois tipos de objetos distintos a serem escolhidos (as bolinhas verdes e as bolinhas azuis), dentre os quais queremos escolher 6 (com possíveis repetições). Assim, a resposta do problema é, por definição, $CR_{2,6}$. Mas, como podemos calcular esse número?

Veja que, como a posição das bolinhas no saquinho não importa, basta determinarmos quantas bolinhas verdes e quantas bolinhas azuis iremos comprar. Denotando por x_1 a quantidade de bolinhas verdes e por x_2 a quantidade de bolinhas azuis, temos que $x_1 + x_2 = 6$. Assim, nesse caso, basta escolhermos x_1 que x_2 estará completamente determinado por $x_2 = 6 - x_1$. Como $x_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ele pode assumir apenas 7 valores, o que nos dá apenas 7 soluções, a saber: $\{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 3), (5, 1), (6, 0)\}$. Logo, há 7 maneiras de realizarmos a compra. \square

Ressaltamos que $CR_{n,r}$ é diferente de $CR_{r,n}$, sempre que $n \neq r$. No primeiro caso, queremos escolher r objetos (permitindo repetições) dentre um grupo de n tipos de objetos distintos; no segundo, temos a situação inversa (escolher n objetos dentre r tipos).

Exemplo 2. *Uma sorveteria vende 6 sabores de sorvete. De quantas formas podemos comprar uma taça de sorvete com duas bolas, considerando que a ordem em que as bolas são posicionadas na taça não é importante?*

Solução. Da definição, temos que o número de maneiras de montar a taça é $CR_{6,2}$. Como o número de bolas é apenas 2, podemos calcular esse valor diretamente, sem a necessidade de introduzir técnicas novas, com uma pequena análise de casos. Há apenas dois casos: (i) as duas bolas são de sabores diferentes, ou (ii) as duas bolas são do mesmo sabor. No caso (i), podemos montar a taça de $C_{6,2}$ maneiras, já que a ordem em que as bolas são escolhidas é irrelevante; assim, há $6 \cdot 5/2 = 15$ maneiras de montar a taça. Temos, ainda, o caso (ii), onde as duas bolas são do mesmo sabor; nesse caso, basta escolhermos qual será esse sabor, o que pode ser feito de 6 maneiras. Sendo assim, o total de maneiras de montar a taça é igual a $15 + 6 = 21$. \square

Observação 3. *Comparando a solução do exemplo acima com a do Exemplo 1, poderíamos também montar uma equação para resolver o Exemplo 2. Para tanto, observe que o que define uma taça é apenas a quantidade de bolas de cada tipo de sorvete. Como há seis tipos, precisamos de seis variáveis, x_1, \dots, x_6 , onde x_i indica a quantidade de bolas do tipo i colocadas na taça. Mas, como devemos escolher apenas 2 bolas, temos que $x_1 + \dots + x_6 = 2$, o que limita bastante a liberdade que temos para escolher os valores das variáveis. Logo mais, veremos uma maneira geral de como calcular o número de soluções de equações como essa.*

Observação 4. *Um erro comum ao tentar resolver o problema do Exemplo 2, seria escolher o sabor de cada bola de forma independente. O primeiro poderia ser escolhido de 6 maneiras e o segundo também, o que nos daria um total de $6 \cdot 6 = 36$ escolhas. O leitor, percebendo que estamos contando em excesso, então é tentado a dividir o resultado por 2, já que a ordem das bolas não importa. Isso resultaria num total de $36/2 = 18$ maneiras de montar a taça, o que também não está correto. O problema com essa “solução” é que nem todas, dentre as 36 maneiras, haviam sido contabilizadas duas vezes, já que as bolas podem ter um mesmo sabor. Por isso, essa “solução” não funciona diretamente.*

Exemplo 5. *Uma fábrica de automóveis dispõe de 3 cores para pintar 6 carros idênticos, cada um com uma única cor. De quantos modos isso pode ser feito?*

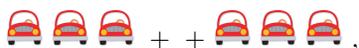
Solução. Aqui, devemos escolher a cor de cada um dos 6 carros. Assim, precisamos fazer 6 escolhas dentre um total de 3 possibilidades. Ou seja, teremos um total de $CR_{3,6}$ maneiras.

Vamos chamar as cores de 1, 2, e 3. Agora, como os carros são idênticos, a ordem em que eles são pintados não é importante. Para cada modo de pintar os carros, sejam x_1, x_2 e x_3 , respectivamente os números de cores dos tipos 1, 2 e 3. Sendo assim, devemos ter $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Então, veja que estamos querendo encontrar a quantidade de soluções de tal equação, onde x_1, x_2 e x_3 são inteiros não negativos.

Vamos representar cada solução de $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ graficamente, onde distribuimos os 6 carros entre os sinais de '+'. Por exemplo, a solução $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2)$ pode ser representada por:



Veja que a quantidade de carro à esquerda do primeiro sinal '+' representa o valor de x_1 , a quantidade de carros entre o primeiro e o segundo sinais '+' representa o valor de x_2 e a quantidade à direita do segundo sinal '+' representa o valor de x_3 . Veja, ainda, que esses valores podem ser nulos. Por exemplo, a solução $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 3)$ é representada por



e a solução $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 4)$ por



Podemos, então, concluir que o número de maneiras de escolher os valores de x_1, x_2 e x_3 é igual ao número de maneiras de distribuir os símbolos  e '+' sobre os 8 traços abaixo:



Para isso, basta escolhermos em quais das 8 posições iremos colocar os dois sinais '+', o que pode ser feito de $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ maneiras. Logo, há 28 maneiras de colorir os carros. \square

Um erro comum, em tentativas de soluções para o exemplo anterior, seria assumir que cada carro pode ser pintado com uma dentre 3 cores de forma independente, obtendo que o número de modos de pintar os carros seria 3^6 . Além disso, não há como simplesmente dividirmos 3^6 por um valor inteiro e obter a resposta correta. Outro erro seria tentar resolver o problema com combinação simples.

A solução do exemplo anterior pode ser generalizada de forma direta para o caso em que queremos escolher r objetos dentre n tipos distintos de objetos, permitindo escolhas repetidas de tipos. Observe que escolher os r objetos

é equivalente a definir quantas cópias de cada um dos n tipos de objetos serão selecionadas. Portanto, denotando por x_i , para $1 \leq i \leq n$, a quantidade de cópias do tipo i que foram escolhidas, concluímos que:

O valor de $CR_{n,r}$ é igual ao número de soluções da equação

$$x_1 + \dots + x_n = r,$$

onde x_1, \dots, x_n são inteiros não negativos.

Vejamos como podemos determinar o número de tais soluções. Vamos representar cada um dos r objetos selecionados pelo símbolo *. Como no Exemplo 5, cada solução da equação anterior pode ser representada por uma sequência formada pelos símbolos * e +. Como temos r objetos, devemos ter r cópias do símbolo *. Observe, ainda, que a expressão $x_1 + \dots + x_n$ possui $n - 1$ cópias do símbolo +. Sendo assim, nossa sequência terá, ao todo, $n - 1 + r$ símbolos. Por exemplo, no caso particular em que $n = 6$ e $r = 7$, a sequência

$$***+*++++**+,$$

representa a solução $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3, 1, 0, 0, 2, 1)$ para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$.

Como cada sequência de $n - 1 + r$ símbolos * e + está inteiramente determinado pelas posições ocupadas pelos símbolos +, temos que o número de sequências desse tipo é igual a $\binom{n-1+r}{n-1}$. Em resumo:

$$CR_{n,r} = \binom{n-1+r}{r}. \quad (1)$$

Exemplo 6. De quantas maneiras podemos comprar dez picolés de uma loja que os oferece em três sabores? Assuma que a loja possui pelo menos dez picolés de cada tipo em estoque.

Solução 1. Temos uma aplicação direta de combinações completas. Devemos escolher 10 objetos dentre 3 opções. Assim a resposta é

$$CR_{3,10} = \binom{3-1+10}{3-1} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66. \quad \square$$

Por vezes, é melhor repetir o argumento que levou a (1) do que aplicar diretamente tal fórmula, em cada caso de interesse. Vejamos como fazer isso, no caso do exemplo anterior.

Solução 2. Cada maneira de comprar os picolés corresponde a uma solução da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde x_i representa a quantidade de picolés do tipo i , para $1 \leq i \leq 3$. Representando cada picolé por *, temos dez

símbolos * e temos dois símbolos +, para montar uma sequência com um total de 12 símbolos que representa uma solução da equação acima. E o número de tais sequências é igual a $\binom{12}{2} = 66$. \square

Em alguns casos, problemas envolvendo combinações completas podem ter restrições adicionais sobre o número de elementos de cada tipo que podem ser escolhidos ou distribuídos.

Exemplo 7. *Uma pessoa dispõe de balas de hortelã, de caramelo e de coco, e pretende montar saquinhos com 13 balas cada, de modo que, em cada saquinho, haja no mínimo três balas de hortelã e duas balas de caramelo. Um saquinho diferencia-se do outro pelo número de balas de cada tipo. De quantas maneiras distintas a pessoa pode montar o saquinho?*

Solução. Considere uma maneira de escolher as balas para montar um saquinho. Representando respectivamente por x_1, x_2 e x_3 os números de balas de hortelã, caramelo e coco, temos que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13. \quad (2)$$

Nesse problema temos uma restrição adicional sobre os valores de x_1 e x_2 , a saber: $x_1 \geq 3$ e $x_2 \geq 2$. Para lidar com tais restrições, operamos as mudanças de variáveis $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 2$ e $y_3 = x_3$. Isolando os valores de x_1, x_2 e x_3 e substituindo-os na equação (2), obtemos:

$$(y_1 + 3) + (y_2 + 2) + y_3 = 13$$

ou, ainda,

$$y_1 + y_2 + y_3 = 8.$$

Agora, a única restrição sobre os valores de y_1, y_2, y_3 é que eles sejam inteiros não negativos. Logo, a quantidade de solução para a última equação é igual a

$$CR_{3,8} = \binom{3-1+8}{3-1} = \binom{10}{2} = 45. \quad \square$$

Exemplo 8. *Sejam r e n inteiros dados, com $r \geq n$. De quantos modos podemos escolher r objetos dentre n tipos distintos de objetos, de modo que pelo menos um objeto de cada tipo seja escolhido?*

Solução. Considere uma maneira de selecionar os r objetos. Para cada i , com $1 \leq i \leq n$, seja x_i o número de objetos do tipo i que foram selecionados. Aqui, temos a restrição adicional de que $x_i \geq 1$ para todo i . Sendo assim, vamos fazer a seguinte mudança de variáveis: $y_i = x_i - 1 \geq 0$, para cada i . Temos, então, que a equação $x_1 + \dots + x_n = r$, equivale a $(y_1 + 1) + \dots + (y_n + 1) = r$ ou, ainda, a

$$y_1 + \dots + y_n = r - n.$$

O número de soluções dessa última equação, onde os y_i são números inteiros não negativos quaisquer, é igual a

$$CR_{n,r-n} = \binom{n-1+r-n}{n-1} = \binom{r-1}{n-1}.$$

Portanto, essa é também a resposta para nosso problema original. \square

Por fim, vamos ver um caso onde há restrições que limitam o número máximo de objetos de um certo tipo.

Exemplo 9. *De quantas maneiras podemos comprar 12 picolés de uma loja que os oferece em 4 sabores, digamos morango, framboesa, uva e chocolate, sabendo que a loja possui em seu estoque apenas 5 picolés de morango. Assuma que a loja possui pelo menos 10 picolés de cada um dos outros três sabores.*

Solução. Considere uma maneira de comprar os picolés. Sejam m, f, u, c respectivamente as quantidades de picolés de morango, framboesa, uva e chocolate. Temos que

$$m + f + u + c = 12, \quad (3)$$

com as seguintes restrições: $0 \leq m \leq 5$ e os valores de f, u, c são não negativos. Primeiramente, vamos ignorar a restrição $m \leq 5$ e contar o número de soluções não negativas da equação $m + f + u + c = 12$. A resposta segue diretamente da fórmula (1):

$$\binom{4-1+12}{4-1} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

Agora, dessas 455 soluções, devemos desconsiderar aquelas em que $m \geq 6$. Vamos, então, contar quantas são as soluções ruins (ou seja, inválidas). Isso pode ser feito como nos exemplos anteriores, com auxílio de uma substituição de variável. Pondo $m' = m - 6$, temos $m = m' + 6$. Substituindo esse valor na equação 3 obtemos a equação equivalente $m' + 6 + f + u + c = 12$ ou, ainda,

$$m' + f + u + c = 6.$$

Essa equação, por sua vez, possui $\binom{4-1+6}{4-1} = \binom{9}{3} = 84$ soluções.

Então, concluímos que, das 455 soluções, 84 são ruins (pois violam a restrição sobre m) e devem ser descartadas. Logo, o número de soluções que satisfazem as restrições do problema é igual a $455 - 84 = 371$. \square

Observamos que o caso onde há um limite superior para a quantidade de vários dos objetos a serem escolhidos, pode ser resolvido de forma semelhante. Contudo, será necessário fazer uma análise de casos e o número de casos cresce muito rapidamente com o número de restrições adicionadas. Além disso, precisaremos usar o chamado *Princípio da Inclusão-Exclusão* (veja a referência [1]) para conseguir combinar o número de soluções encontradas em

cada caso. Essa é uma técnica que foge do escopo dessa aula, de forma que não trataremos desse tipo de problema aqui. Com mais cuidado, também é possível misturar situações onde temos tanto limites mínimos quanto máximos para as quantidades de alguns dos objetos.

2 Distribuindo objetos em caixas

Consideraremos quatro casos aqui, dependendo de se os objetos e as caixas forem idênticos ou não. Ilustraremos cada caso com um exemplo. Uma observação importante é que, em todos os casos abaixo, a ordem dos objetos dentro de cada caixa não é relevante. Estaremos interessados apenas em saber quais objetos pertencem a cada caixa. E, no caso de objetos idênticos, apenas a quantidade de objetos em cada caixa é relevante.

Alguns dos exemplos dessa seção foram adaptados de [2].

2.1 Objetos distintos em caixas distintas

Digamos que temos r objetos distintos, os quais devem ser distribuídos em n caixas distintas. Esse caso pode ser resolvido diretamente, usando o princípio fundamental da contagem. Para cada um dos r objetos, temos de escolher um dentre n possíveis locais para colocá-lo. Assim, temos n escolhas para cada objeto, o que nos dá um total de

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{n \text{ vezes}} = n^r$$

maneiras de distribuí-los.

Exemplo 10. De quantas formas podemos distribuir 25 livros diferentes em 4 caixas que possuem cores diferentes?

Solução. Para cada um dos 25 livros, basta escolher em qual das 4 caixas ele será colocado. Logo, temos um total de 25^4 maneiras de distribuir os livros. \square

Considere, agora, o caso em que o número de objetos a serem colocados em cada caixa é determinado previamente.

Exemplo 11. De quantas maneiras podemos distribuir 25 livros diferentes em 4 caixas, de modo que a caixa amarela tenha 5 livros, a preta tenha 4 livros, a verde tenha 10 livros e a branca tenha 6 livros?

Solução 1. Vamos escolher os livros em cada caixa separadamente. Há $\binom{25}{5}$ maneiras de escolher os livros que serão colocados na caixa amarela. Uma vez feito isso, haverá $\binom{20}{4}$ maneiras de escolher, dentre os 20 restantes livros, quais serão colocados na caixa preta. Da mesma forma, haverá $\binom{16}{10}$ maneiras de escolher quais, dentre os $25 - 5 - 4 = 16$ livros restantes, serão colocados na caixa verde. Por fim, haverá $\binom{6}{6} = 1$ maneiras de colocar os demais 6 livros na caixa branca.

Dessa forma, pelo princípio fundamental da contagem, o total de maneiras de distribuir os livros nas caixas é igual a:

$$\binom{25}{5} \binom{20}{4} \binom{16}{10} \binom{6}{6} = \frac{25!}{5!20!} \frac{20!}{4!16!} \frac{16!}{10!6!} \frac{6!}{6!0!} = \frac{25!}{5!4!10!6!}.$$

\square

Solução 2. Como os livros são distintos, podemos representar cada maneira de distribuí-los por uma sequência de 25 letras, formada pelas letras A, P, V, B , onde, para cada i de 1 a 25, a letra da posição i indica em qual caixa será guardado o livro i . Como as quantidades de vezes em que as letras A, P, V, B aparecem são, respectivamente, 5, 4, 10 e 6, o total de maneiras de distribuir os livros é igual ao número de permutações com elementos repetidos $P_{25}^{5,4,10,6} = \frac{25!}{5!4!10!6!}$. \square

Generalizando o exemplo anterior percebe-se que, dados inteiros não negativos n_1, n_2, \dots, n_r tais que $n_1 + \dots + n_r = n$, o número de maneiras de distribuir n objetos em r caixas, de modo que a i -ésima caixa contenha n_i objetos, é igual a

$$P_n^{n_1, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_r!}.$$

2.2 Objetos idênticos em caixas distintas

O número de formas de distribuir r objetos idênticos em n caixas distintas (em que cada caixa pode ficar vazia ou receber um ou mais objetos), é precisamente $CR_{n,r}$. Observe que devemos realizar r escolhas, já que temos que determinar, para cada objeto, em qual caixa ele será colocado. Numerando as caixas de 1 a n , e chamando de x_1, \dots, x_n as quantidades de objetos nas respectivas caixas, vemos que o número de maneiras de distribuir os objetos corresponde ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + \dots + x_n = r$. Mas, como vimos anteriormente, tal número de maneiras é igual a $CR_{n,r}$.

Vejamos uma outra forma de entender isso. Tome uma coleção de n tipos de objetos e vamos escolher r deles, permitindo que sejam escolhidos vários de um mesmo tipo. O número de maneiras pelas quais podemos fazer isso é, por definição, $CR_{n,r}$. Agora, digamos que você tenha n caixas, numeradas de 1 até n , e tenha também r bolinhas idênticas. Para cada um dos r objetos escolhidos anteriormente, observe qual o seu tipo e, caso ele seja do tipo i (onde $1 \leq i \leq n$), coloque um bolinha na i -ésima caixa. Procedendo dessa forma, vemos que a quantidade de maneiras de escolher os r objetos é igual ao número de maneiras de distribuir as bolinhas nas caixas.

Exemplo 12 (UNIRIO). Calcule o número de maneiras diferentes pelas quais podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças, Antonio, Beatriz e Carlos.

Solução. Nesse caso as balas são idênticas, mas as três crianças são pessoas diferentes. Assim, as crianças desempenham o papel de $n = 3$ caixas distintas, ao passo que as balas são os $r = 12$ objetos iguais a serem distribuídos. Pelo que fizemos acima, o número de maneiras de distribuir as balas é $CR_{3,12}$. \square

2.3 Objetos distintos em caixas idênticas

Vamos ilustrar esse problema com um exemplo pequeno.

Exemplo 13. De quantas maneiras podemos distribuir quatro funcionários em três escritórios idênticos, dado que um escritório pode ser ocupado por mais de um funcionário?

Solução. Vamos resolver esse problema simplesmente enumerando todas as possibilidades (de forma organizada). Representemos os quatro empregados pelas letras A, B, C e D . Cada maneira de fazer a distribuição pode ser representada por uma partição dos elementos do conjuntos $\{A, B, C, D\}$. Há alguns casos a considerar:

- (i) Todos os empregados estão em um mesmo escritório: como os escritórios são idênticos, não importa em qual escritório eles serão colocados. Logo há apenas 1 maneira de distribuí-los, que pode ser representada por $\{\{A, B, C, D\}\}$.
- (ii) Três dos funcionários estão em um mesmo escritório e o quarto está em outro: aqui, basta escolher quais os três que ficarão juntos, o que pode ser feito de $\binom{4}{3} = 4$ maneiras. Tais maneiras podem ser representadas por

$$\{\{A, B, C\}, \{D\}\}, \{\{A, B, D\}, \{C\}\}, \\ \{\{A, C, D\}, \{B\}\}, \{\{B, C, D\}, \{A\}\}.$$

- (iii) Dois empregados estão em um mesmo escritório e dois em outro: isso pode ser feito de três maneiras, a saber:

$$\{\{A, B\}, \{C, D\}\}, \\ \{\{A, C\}, \{B, D\}\}, \\ \{\{A, D\}, \{B, C\}\}.$$

- (iv) Dois empregados estão em um escritório, enquanto os outros dois estão em dois escritórios distintos entre si e daquele onde se encontram os dois primeiros: nesse caso, basta escolher os dois que ficarão juntos, o que pode ser feito de $\binom{4}{2} = 6$ maneiras. Estas são

$$\{\{A, B\}, \{C\}, \{D\}\}, \{\{A, C\}, \{B\}, \{D\}\}, \\ \{\{A, D\}, \{B\}, \{C\}\}, \{\{B, C\}, \{A\}, \{D\}\}, \\ \{\{B, D\}, \{A\}, \{C\}\}, \{\{C, D\}, \{A\}, \{B\}\}.$$

\square

Digamos, agora, que você queira distribuir r objetos distintos em n caixas idênticas, com a restrição adicional de que cada caixa fique com pelo menos um objeto. A quantidade de maneiras de fazer isso é conhecida como o *número de Stirling* de segundo tipo, sendo representada por $S(r, n)$. É possível encontrar uma fórmula para o valor de $S(r, n)$. Contudo, para fazer isso também precisaríamos utilizar o Princípio da Inclusão-Exclusão, por isso não poderemos encontrar a fórmula exata nesse momento. Também é possível demonstrar que o número de funções sobrejetoras $f: X \rightarrow Y$, onde $|X| = r$ e $|Y| = n$ são conjuntos dados, é igual a $n!S(r, n)$ (o que pode ser feito facilmente e será deixado a cargo do leitor curioso).

Um outra forma de resolver o Exemplo 13 é dividindo a análise em casos, de acordo com o número de escritórios não vazios. Fazendo isso, veja que devemos ter exatamente 1, 2 ou 3 escritórios sendo utilizados. A quantidade de maneiras de distribuir os funcionários em cada caso é respectivamente igual a $S(4, 1)$, $S(4, 2)$ e $S(4, 3)$. Temos que $S(4, 1) = 1$ (correspondendo ao item (i) da solução), $S(4, 2) = 4 + 3 = 7$ (correspondendo aos itens (ii) e (iii) da solução) e $S(4, 3) = 6$ (correspondendo ao item (iii)). Portanto, o total de maneiras de distribuir os funcionários é $S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3)$.

2.4 Objetos idênticos em caixas idênticas

Assim como na subseção anterior, faremos um exemplo que será resolvido simplesmente listando todas as possibilidades.

Exemplo 14. De quantas formas podemos distribuir 6 cópias de uma mesmo livro em 3 caixas idênticas.

Solução. Para cada maneira de empacotar os livros, vamos listar as quantidades de livros em cada caixa, começando da que tem mais livros até a que tem menos. As formas pelas quais podemos empacotar os livros são as seguintes:

- (6)
- (5,1)
- (4,2)
- (4,1,1)
- (3,3)
- (3,2,1)
- (3,1,1,1)
- (2,2,2)
- (2,2,1,1).

Por exemplo, a sequência (4, 1, 1) indica que uma das caixas contém 4 livros, uma contém 1 livro, uma terceira também contém 1 livro e uma quarta está vazia. Portanto, podemos concluir que há nove maneiras de empacotar os livros, pois listamos todas elas. \square

Observe que distribuir r objetos idênticos em n caixas também idênticas é o mesmo que escrever r como uma soma de no máximo k inteiros positivos, em ordem não-crescente. Se, para algum j de 1 a n , tivermos que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_j = r,$$

onde a_1, a_2, \dots, a_j são inteiros positivos tais que $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_j$, diremos que (a_1, a_2, \dots, a_j) é uma *partição* do inteiro positivo r em j parcelas. Assim, definimos $p_n(r)$ como o número de partições do inteiro r em n parcelas.

A discussão acima deixa claro que o número de maneiras de distribuir n objetos idênticos em k caixas idênticas é igual a $p_n(k)$. Contudo, infelizmente não existe uma *fórmula fechada* simples para expressar o valor de $p_n(k)$ em função de n e k .

Dicas para o Professor

Cuidado para não confundir os papéis desempenhados por n e r em $CR_{n,r}$. Veja que $CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$. Contudo, isso é diferente de $\binom{n+r-1}{r-1}$ para $n \neq r$. A maneira mais segura de resolver os problemas que envolvem combinações completas é pensando na equação que resolve o problema, e tomando n como o número de variáveis nessa equação. Para não se confundir, veja que a quantidade de sinais de '+' na equação é igual a $n - 1$ e este é o número que deve figurar na parte de baixo do número binomial da fórmula.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.
2. Rosen, Kenneth. *Discrete Mathematics and Its Applications* 7th edition. McGraw-Hill Science, 2011 (em inglês).