Material Teórico - Módulo de Razões e Proporções

Números Diretamente e Inversamente Proporcionais

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Nas aulas anteriores, aprendemos que uma quádrupla de números não nulos (x, y, a, b) formam uma proporção quando é válida a seguinte igualdade:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

Agora, mostraremos como o conceito de proporcionalidade pode ser estendido para sequências de números.

Definição 1

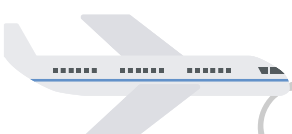
Sejam $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $(a_1, a_2, ..., a_n)$ duas sequências de números não nulos. Dizemos que as sequências são **diretamente proporcionais** se existe um número k tal que

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n} = k. \qquad (1)$$

Neste caso, k é chamado de **constante de proporcionalidade**.

Observação. Por vezes, a palavra "diretamente" na definição acima é omitida, ficando subtendida. Neste caso, é comum falarmos simplesmente que duas sequências dadas são proporcionais.

Exemplo 1. *Um avião em movimento constante faz certo deslocamento em certo tempo. Veja, abaixo, uma tabela que relaciona estas grandezas:*



Tempo (h)	Deslocamento (km)
0,5	300
1	600
3	1800
4	2400

Observe que a sequência formada pelos tempos medidos é diretamente proporcional à sequência das distâncias percorridas. De fato, podemos verificar sem dificuldade que

$$\frac{0,5}{300} = \frac{1}{600} = \frac{3}{1800} = \frac{4}{2400}.$$

Assim, veja que quando o avião se desloca por mais tempo, o distância percorrida ***aumenta*** *na mesma proporção. Por exemplo, ao triplicar-se o tempo de $1h$ para $3h$, a distância percorrida também é triplicada.* $\square$

Exercício 2. *Vitor trabalha preparando bolos para vender na feira. Se ele é capaz de fabricar 24 bolos em três dias, quantos bolos ele poderá fabricar em 10 dias?*

Solução. Primeiramente, perceba que uma suposição *implícita* ao problema é a de que o número de bolos fabricados é diretamente proporcional ao número de dias trabalhados (isto é, trabalhando sob condições idênticas, Vitor sempre fabricará 24 bolos a cada três dias).

Sendo x o número de bolos fabricados em dez dias, podemos construir a seguinte tabela relacionando os número de dias trabalhados com os números de bolos fabricados:

Dias	Bolos
3	24
10	x

Como já observamos, os números que fazem parte da primeira coluna são proporcionais aos da segunda. Assim:

$$\frac{3}{24} = \frac{10}{x}.$$

Multiplicando em 'xis', temos $3x = 240$. Portanto, o número de bolos fabricados em 10 dias será $x = \frac{240}{3} = 80$. $\square$

Exercício 3. *Numa loja de automóveis, cada vendedor recebe uma comissão proporcional ao número de carros que vende. Se, em uma semana, o gerente pagou um total de* R\$ 8.280,00 *de comissões a quatro funcionários, os quais venderam 3, 6, 7 e 9 carros, respectivamente, pergunta-se: quanto ganhou o vendedor que menos carros vendeu?*

Solução. Sejam x, y, z e w os valores das comissões recebidas pelos quatro vendedores, nesta ordem. Como é dito no enunciado que estes valores são proporcionais aos números de carros vendidos, temos:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7} = \frac{w}{9} = k.$$

Aplicando agora as propriedades das proporções, temos que:

$$\frac{x+y+z+w}{3+6+7+9} = k.$$

Mas, como $x+y+z+w$ é o total pago em comissões aos quatro vendedores, concluímos que $x+y+z+w = 8.280$. Então, a última igualdade acima fornece a igualdade $\frac{8.280}{25} = k$, de forma que

$$k = \frac{8.280}{25} = 331,20.$$

Portanto, o vendedor que ganhou a menor comissão (que é aquele que vendeu menos carros) recebeu

$$x = 3k = 3 \times 331,20 = 993,60$$

reais. $\square$

Atenção! Um equívoco bastante comum é pensar que duas variáveis são diretamente proporcionais se uma aumenta sempre que a outra aumenta. Lembre-se de que esta é uma *condição necessária*, mas não *suficiente* para a proporcionalidade.

Para compreender melhor o que está acontecendo aqui, considere a tabela a seguir, que relaciona a medida do lado de um quadrado com sua respectiva área (lembre-se de que a área de um quadrado de lado ℓ centímetros é igual a $\ell^2 = \ell \times \ell$ centímetros quadrados):

Lado (cm)	**Área** (cm^2)
1	1
2	4
5	25
10	100

Note que, ao aumentarmos a medida do lado, a área do quadrado também aumenta, porém não na mesma proporção. Por exemplo, ao dobrarmos o lado, digamos de ℓ para 2ℓ a área passa de $\ell^2 = \ell \times \ell$ para

$$(2\ell)^2 = (2\ell) \times (2\ell) = 4\ell^2;$$

assim, a nova área é o quádruplo, em vez do dobro, da área anterior. $\square$

Voltemo-nos, agora, ao outro conceito-chave deste material.

Definição 2

Sejam $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $(a_1, a_2, ..., a_n)$ duas sequências de números não nulos. Dizemos que as sequências são **inversamente proporcionais** se existe um número k tal que

$$\frac{x_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{a_2}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{a_n}} = k. \qquad (2)$$

Também neste caso, k é chamado de **constante de proporcionalidade**.

Aplicando as propriedades das frações, vemos prontamente que o fato de as sequências $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $(a_1, a_2, ..., a_n)$ serem inversamente proporcionais, com constante de proporcionalidade k, é equivalente a termos as igualdades abaixo:

$$x_1 \cdot a_1 = x_2 \cdot a_2 = \cdots = x_n \cdot a_n = k.$$

A ideia por trás do conceito de proporcionalidade inversa é a de que (nas notações da discussão acima), aumentando ou diminuindo o valor de x_i, o valor de a_i diminui ou aumenta proporcionalmente. A esse respeito, vejamos alguns exercícios ilustrativos.

Exemplo 4. *Um ciclista faz um treino para a prova de "1.000 metros contra o relógio", mantendo em cada volta uma velocidade constante e obtendo, assim, um tempo correspondente, conforme a tabela a seguir:*

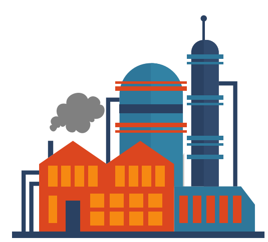
Velocidade (m/s)	**Tempo** s
5	200
8	125
10	100
16	62,5
20	50

Observe que a sequência formada pelas velocidades em cada volta é inversamente proporcional ao tempo que foi necessário para completá-la. Realmente, podemos verificar sem dificuldade que

$$5 \cdot 200 = 8 \cdot 125 = \cdots = 20 \cdot 50 = 1000.$$

Assim, veja que quando o ciclista aumenta *sua velocidade, o tempo correspondente* diminui *na mesma proporção. Por exemplo, ao dobrar a velocidade de* $5m/s$ *para* $10m/s$*, o tempo de completamento da volta passa a ser metade do anterior.* $\square$

Exercício 5. *Uma fábrica de alimentos para animais possui três máquinas iguais, as quais conseguem produzir uma tonelada de ração em catorze dias, caso funcionem juntas. Se a fábrica comprar outras quatro máquinas iguais, em quanto tempo as sete máquinas (também trabalhando juntas) irão produzir uma tonelada de ração?*



Solução. Seja x o número de dias que estamos procurando. Podemos resolver este exercício construindo uma tabela:

Máquinas	**Dias**
3	14
7	x

Quanto maior for o número de máquinas, menor será o tempo necessário para finalizar o trabalho; além disso, é razoável supor que a diminuição seja proporcional ao aumento do número de máquinas, uma vez que elas são todas iguais e trabalharão juntas. Em resumo, isto significa que a sequência de números da primeira coluna da tabela são inversamente proporcionais àqueles da segunda coluna. Dessa forma, podemos escrever

$$3 \cdot 14 = 7 \cdot x.$$

Resolvendo esta equação, descobrimos que o número de dias necessários para sete máquinas realizarem o trabalho, juntas, é $x = 6$. □

Conforme mostrado no próximo exercício, é por vezes mais simples analisar determinada situação interpretando-a em termos de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, ao invés de quere utilizar diretamente as fórmulas (1) ou (2). Vejamos uma tal situação.

Exercício 6. *Carlos possui uma fábrica de peças de roupas que tem cinco funcionários. Certo dia, ele recebeu de um importante cliente uma encomenda de* 1.000 *peças, as quais deveriam ser entregues em* 10 *dias. Passados cinco dias, ele verificou que apenas* 400 *peças haviam sido confeccionadas. Pergunta-se:*

a) Mantendo-se o mesmo número de funcionários, Carlos conseguirá entregar a encomenda no dia certo? Em caso de atraso, quantos dias extras serão necessários?

b) Para entregar a encomenda no dia correto, quantos funcionários extras Carlos deverá contratar após ter percebido que não conseguiria entregar no prazo?

Solução.

a) De imediato, percebemos que será impossível entregar a encomenda a tempo, mantidas as condições atuais de trabalho. Isto porque, se nos cinco primeiros dias os funcionários fabricaram 400 roupas, então nos próximos cinco dias ele produzirão apenas mais 400 peças. Veja ainda que, em cada dia, são produzidas $\frac{400}{5} = 80$ peças, de forma que ao final do décimo dia terão sido produzidas 800 peças, ao final do 11^o terão sido produzidas $80 \cdot 11 = 880$, no final do 12^o terão sido produzidas $80 \cdot 12 = 960$ e, finalmente, Carlos integralizará $13 \cdot 13 = 1.040$ peças no 13^o dia. Dessa forma, mantendo-se o número de empregados, serão necessários três dias extras. (Para ser mais exato, serão necessários dois dias e meio.)

b) Agora, seja x o número de funcionários extras que serão contratados após o quinto dia. Dessa forma, teremos $5 + x$ funcionários para produzir as 600 peças restantes nos próximos cinco dias. Veja que o número de funcionários é diretamente proporcional ao número de peças fabricadas. Assim:

$$\frac{5}{400} = \frac{5+x}{600}.$$

Multiplicando em 'xis', temos

$$\begin{aligned} 3.000 = 400(5+x) &\Rightarrow 30 = 4(5+x) \\ &\Rightarrow 30 = 20 + 4x \\ &\Rightarrow x = \frac{10}{4} = 2,5. \end{aligned}$$

Porém, como não é possível contratar 'meio' funcionário, Carlos deverá contratar pelo menos mais três funcionários. □

2 Sugestões ao Professor

Recomendamos que o professor separe um encontro de 50 minutos cada para apresentar este material. Comece mostrando a definição de sequências diretamente proporcionais e resolvendo os exercícios relacionados. Em seguida, repita o processo para sequências de números inversamente proporcionais, comparando as definições e exemplos em um e outro caso. Considere também verificar se os alunos conseguem diferençar quando duas sequências são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nenhuma das opções. Faça isso apresentando duas sequências e, em seguida, perguntando a qual categoria o par de sequências pertence.

Créditos pelas figuras:
`www.freepik.com`