Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Regra da Cadeia - Exercícios - Parte III

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de Março de 2025

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta terceira parte da aula, resolveremos mais alguns problemas envolvendo a regra da cadeia.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Considere a função polinomial de grau* 16

$$P(x) = (((x^2+1)^2+1)^2+1)^2+1.$$

Determine $P'(1)$.

Solução. Se f é a função quadrática de regra $f(x) = x^2+1$, então $P = f \circ f \circ f \circ f$. Utilizando a regra da cadeia várias vezes, temos

$$\begin{aligned} P'(x) &= f'\big((f \circ f \circ f)(x)\big) \cdot \big(f \circ f \circ f\big)'(x) \\ &= f'(f(f(f(x)))) \cdot f'\big((f \circ f)(x)\big)(f \circ f)'(x) \\ &= f'(f(f(f(x)))) \cdot f'(f(f(x))) \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

para todo x. Como $f(1) = 2$, $f(f(1)) = f(2) = 5$ e $f(f(f(1))) = f(5) = 26$, vem que

$$\begin{aligned} P'(1) &= f'(f(f(f(1)))) \cdot f'(f(f(1))) \cdot f'(f(1)) \cdot f'(1) \\ &= f'(26) \cdot f'(5) \cdot f'(2) \cdot f'(1). \end{aligned}$$

Daí, sendo $f'(x) = 2x$, obtemos

$$P'(1) = 52 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 2 = 4160.$$

□

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Em alguns dos exemplos a seguir, nos referiremos a uma função $f : I \to \mathbb{R}$ como sendo **continuamente derivável**, ou **de classe C^1**, para significar que f é derivável em I e $f' : I \to \mathbb{R}$ é contínua.

Exemplo 2.

a) *Sejam I um intervalo simétrico (isto é, tal que $x \in I \Rightarrow -x \in I$) e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se f for uma função par (resp. ímpar), mostre que f' é uma função ímpar (resp. par).*

b) Existe alguma função continuamente derivável e par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\cos = 1 - f^2$*? Justifique!*

Solução. Sendo f par, temos $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Derivando, obtemos, graças à regra da cadeia, $-f'(-x) = f'(x)$, de onde se vê que f' é ímpar. A demonstração de que "f ímpar $\Rightarrow$ f' par" é análoga e será deixada como exercício.

Quanto ao item b), a resposta é *não*. De fato, se existisse uma função f naquelas condições, então, derivando a relação dada, teríamos $\text{sen} = 2ff'$. Como f é par, o item anterior assegura que f' é ímpar, de sorte que $f'(0) = 0$. Por outro lado, $f(0)^2 = 1 - \cos 0 = 0$, ou seja, $f(0) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2f(x)f'(x)}{x} \\ &= 2 \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot f'(x) \right) \\ &= 2f'(0) \cdot f'(0) = 0, \end{aligned}$$

um absurdo. □

Exemplo 3. *Seja* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x + \sqrt{x + 1}}}},$$

com dez raízes quadradas. Calcule $f'(0)$*.*

Solução. Para todo n natural, seja $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x + \sqrt{x + 1}}}},$$

com n raízes quadradas. Em particular, $f = f_{10}$.

Afirmamos que cada f_n só assume valores maiores ou iguais a 1 e é derivável.

De fato, considere $r : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ expressa pela regra $r(y) = \sqrt{y}$. Observando que r é derivável, justificaremos a afirmação anterior por indução em n.

Para $n = 1$, denotando por Id_0 a restrição da função identidade ao intervalo $[0, +\infty)$, temos $f_1 = r \circ (\mathrm{Id}_0 + 1)$, sendo a composição possível porque $\mathrm{Id}_0 + 1 \geq 1$. Assim, a diferenciabilidade de f_1 segue da regra da cadeia, enquanto o fato da função r tomar valores na semirreta $[1, +\infty)$ implica a desigualdade $f_1 \geq 1$.

O passo de indução segue a mesma linha de raciocínio do parágrafo anterior, pois as hipóteses "$f_n \geq 1$" e "f_n é derivável", juntamente com a regra da cadeia e o fato de que $f_{n+1} = r \circ (\mathrm{Id}_0 + f_n)$, implicam (já que $\mathrm{Id}_0 + f_n \geq 1$ e $\mathrm{Id}_0 + f_n$ é derivável) as conclusões desejadas acerca de f_{n+1}.

Afirmação demonstrada, seja $x_n = f_n'(0)$ para cada n natural. Notando que $f_n(0) = 1$, a relação $f_n(x)^2 = x + f_{n-1}(x)$ fornece, por derivação,

$$2f_n(0)f_n'(0) = 1 + f_{n-1}'(0),$$

ou seja, $2x_n = 1 + x_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

A recorrência anterior pode ser reescrita na forma $x_n - 1 = (x_{n-1} - 1)/2$, de onde se vê que a sequência $(x_n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica de razão $1/2$. Como

$$f_1'(0) = \frac{d}{dx}\sqrt{x+1}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2},$$

temos $x_1 - 1 = f_1'(0) - 1 = -1/2$; assim,

$$x_n - 1 = (x_1 - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}},$$

logo, $x_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. Então,

$$f'(0) = x_{10} = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}.$$

$\square$

Exemplo 4 (OBMU/2002 - 1ª fase/Adaptado). *A função $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ é continuamente derivável. Sabe-se que $f(0) = 0$, $f'(0) = a$ e que $f(x+1) = e^{f(x)}$ para todo $x > -1$. Calcule $f'(3)$ e mostre que $a \geq 0$.*

Solução. Temos

$$f(1) = e^{f(0)} = 1, \quad f(2) = e^{f(1)} = e, \quad f(3) = e^{f(2)} = e^e.$$

Derivando a igualdade $f(x+1) = e^{f(x)}$ com o auxílio da regra da cadeia, obtemos $f'(x+1) = f'(x)e^{f(x)}$, ou seja,

$$f'(x+1) = f'(x)f(x+1), \tag{1}$$

para cada $x > -1$. Logo,

$$f'(1) = f'(0)f(1) = a, \quad f'(2) = f'(1)f(2) = ae,$$
$$f'(3) = f'(2)f(3) = ae \cdot e^e = ae^{1+e}.$$

Para discutir o sinal de a, primeiro observe que $f(x) = \ln(f(x+1))$ para cada $x > -1$. Daí,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \ln f(x+1) = -\infty, \tag{2}$$

pois $\lim_{y \to 0+} \ln y = -\infty$ e $y = f(x+1) \to f(0) = 0$, necessariamente pela direita, quando $x \to -1^+$. Logo, se $a \neq 0$, a relação (1) dá

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f'(x+1)}{f(x+1)} = \frac{a}{0^+} = \pm\infty,$$

conforme a seja positivo ou negativo. Todavia, de acordo com (2), f não pode ser decrescente em nenhum intervalo da forma $(-1, -1+\delta)$, $\delta > 0$, impedindo que f' seja negativa em tais intervalos. Portanto,

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty.$$

Consequentemente, $a \neq 0 \Rightarrow a > 0$; portanto, $a \geq 0$. □

Exemplo 5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}.$$

Mostre que f é derivável, mas f' é descontínua na origem [1].

[1] Confira o 5º parágrafo da seção *Dicas para o Professor* na aula *Propriedades - Parte I*, do módulo *Derivada como Função*.

Solução. Se $x \neq 0$, temos, pela regra da cadeia,

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

isto é, $f'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$.

Para mostrarmos que $f'(0)$ existe e calcular seu valor, recorreremos à definição de derivada:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0, \end{aligned}$$

em que, na última igualdade, usamos o exemplo 7 da aula *O Teorema do Sanduíche*, do módulo *Leis do Limite - Parte 1*.

Tendo estabelecido a diferenciabilidade de f, vejamos que f' é descontínua na origem. Na verdade, 0 é um ponto de descontinuidade *essencial* de f' [2], no sentido de que o limite de f' em 0 não existe (mesmo os limites laterais).

Com efeito, se existisse $L := \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, teríamos

$$\lim_{x\to 0^+} \cos(1/x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x \operatorname{sen}(1/x) - f'(x)\right) = -L.$$

Fazendo a mudança de variável $y = 1/x$, seguiria a existência de $\lim_{y\to+\infty} \cos y$, o que não é o caso. $\square$

Exemplo 6 (IMC - 2018). *Encontre todas as funções deriváveis* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'\big(\sqrt{ab}\big), \quad \forall\, a, b > 0.$$

Solução. Afirmamos que f é duas vezes derivável. Com efeito, fixado $x_0 > 0$, tome qualquer real a positivo e diferente de x_0 (por exemplo, $a = x_0 + 1$). Tomando $x > 0$ e fazendo $b = x^2/a$ na equação funcional, um cálculo simples permite escrever

$$f'(x) = \frac{a(f(x^2/a) - f(a))}{x^2 - a^2}.$$

[2] Vide observação 4 da aula *Continuidade em um ponto - Parte III*, do módulo *Funções Contínuas*.

Como o denominador não se anula para $x = x_0$, as regras de derivação garantem que f' é derivável em x_0, o que justifica a afirmação.

Substituindo b por x na relação do enunciado, ficamos com

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'\big(\sqrt{ax}\big), \quad \forall\, a, x > 0.$$

Derivando com respeito a x, segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'\big(\sqrt{ax}\big) + (x-a)f''\big(\sqrt{ax}\big) \cdot \frac{a}{2\sqrt{ax}} \\ &= f'\big(\sqrt{ax}\big) + \frac{a(x-a)f''\big(\sqrt{ax}\big)}{2\sqrt{ax}}. \end{aligned}$$

Tomando $a = 1/x$ nessa igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(1) + \frac{\frac{1}{x}\Big(x - \frac{1}{x}\Big)f''(1)}{2} \\ &= \left(f'(1) + \frac{f''(1)}{2}\right) - \frac{f''(1)/2}{x^2} \\ &= A - \frac{B}{x^2}, \end{aligned}$$

em que $A = f'(1) + f''(1)/2$ e $B = f''(1)/2$.

Observando que a expressão $A - B/x^2$ é a derivada em x da função $x \mapsto Ax + B/x$, com $x > 0$, a relação

$$\frac{d(f(x))}{dx} = \frac{d(Ax + B/x)}{dx}$$

implica

$$f(x) = Ax + \frac{B}{x} + C \tag{3}$$

para alguma constante C.

Reciprocamente, dados $A, B, C \in \mathbb{R}$ e sendo $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função de regra (3), temos $f'(x) = A - \frac{B}{x^2}$; a partir daí, um pouco de álgebra elementar torna fácil verificar que essa função satisfaz a equação funcional do enunciado.

Assim, o conjunto-solução procurado consiste das funções reais f, definidas na semirreta positiva, expressas por (3). $\square$

Seja f uma função diferenciável no ponto x, com $f(x) \neq 0$. Considerando separadamente os casos $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$, o leitor pode verificar facilmente (e sem a necessidade do emprego da regra da cadeia!) que a composição de f com a função modular é derivável em x, com

$$\frac{d(|f(x)|)}{dx} = \frac{|f(x)|}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Assim, $\frac{d(|f(x)|)}{dx} = \pm f'(x)$, em que os sinais $+$ ou $-$ são utilizados conforme $f(x)$ seja positivo ou negativo.

Agora, sendo f uma função derivável e não nula em cada ponto de seu domínio, a regra $x \mapsto \ln |f(x)|$ define uma função de mesmo domínio que f. Pela observação acima e pela regra da cadeia, tal função é derivável, com derivada dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d(\ln |f(x)|)}{dx} &= \ln' |f(x)| \cdot \frac{d(|f(x)|)}{dx} \\
&= \frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{d(|f(x)|)}{dx} \\
&= \frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{|f(x)|}{f(x)} \cdot f'(x),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d(\ln |f(x)|)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

A expressão f'/f, a qual costumamos chamar *derivada logarítmica de* f, pode ser uma ferramenta útil para realizar cálculos.

Exemplo 7. *Calcule a derivada no ponto* -1 *da função* f *cuja regra é*

$$f(x) = \frac{\sqrt[5]{4x^2 - 1}\sqrt[3]{2 - x^7}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Solução. Começamos observando que $f(x)$ está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, para $x \in (-\infty, -1/2)$ (um intervalo aberto contendo -1), os radicandos das raízes compondo a expressão que define f são todos positivos. Em particular, f é positiva e derivável naquele intervalo.

Mantendo em mente que $x < -1/2$, podemos escrever

$$\ln f(x) = \frac{\ln(4x^2-1)}{5} + \frac{\ln(2-x^7)}{3} - \frac{\ln(x^2+1)}{2}.$$

Derivando ambos os membros dessa igualdade com o auxílio da regra da cadeia, chegamos a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{8x}{5(4x^2-1)} - \frac{7x^6}{3(2-x^7)} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Por fim, como $f(-1) = \frac{\sqrt[15]{3^8}}{\sqrt{2}}$ (verifique!), vem que

$$\begin{aligned} f'(-1) &= f(-1)\Big(-\frac{8}{15} - \frac{7}{9} + \frac{1}{2}\Big) \\ &= \frac{\sqrt[15]{3^8}}{\sqrt{2}} \cdot \Big(-\frac{73}{90}\Big) = -\frac{73\sqrt[15]{3^8}}{90\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8 (IME - 2025). *Considere o polinômio*

$$P(x) = \left(\frac{x^{2025}-1}{x-1}\right)^{2025}.$$

Determine o coeficiente de x^3 em $P(x)$.

Solução. Seja $Q(x) = \frac{x^{2025}-1}{x-1}$. Por conta da fatoração

$$x^n - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k,$$

vale, para $n = 2025$, que

$$Q(x) = x^{2024} + x^{2023} + \ldots + x^2 + x + 1$$

para cada real $x \neq 1$ (uma vez que $Q(x)$ não está definida quando $x = 1$). Portanto, a igualdade $P(x) = Q(x)^{2025}$ garante que

$$P(x) = (x^{2024} + x^{2023} + \ldots + x^2 + x + 1)^{2025} \tag{4}$$

para todo $x \neq 1$.

Por outro lado, o exemplo 13 da aula *Propriedades - Parte II*, do módulo *Derivada como Função*, diz que o coeficiente de x^3 em $P(x)$ nada mais é que $P'''(0)/3!$. Derivando três vezes a relação $P(x) = Q(x)^{2025}$ com o auxílio da regra da cadeia, vem que

$$P'(x) = 2025Q(x)^{2024}Q'(x),$$

$$P''(x) = 2025 \cdot 2024Q(x)^{2023}Q'(x)^2 + 2025Q(x)^{2024}Q''(x)$$

e

$$\begin{aligned} P'''(x) &= 2025 \cdot 2024 \cdot 2023Q(x)^{2022}Q'(x) \cdot Q'(x)^2 \\ &\quad + 2025 \cdot 2024Q(x)^{2023} \cdot 2Q'(x)Q''(x) \\ &\quad + 2025 \cdot 2024Q(x)^{2023}Q'(x)Q''(x) \\ &\quad + 2025Q(x)^{2024}Q'''(x) \\ &= 2025 \cdot 2024 \cdot 2023Q(x)^{2022}Q'(x)^3 \\ &\quad + 3 \cdot 2025 \cdot 2024Q(x)^{2023}Q'(x)Q''(x) \\ &\quad + 2025Q(x)^{2024}Q'''(x). \end{aligned}$$

Fazendo $x = 0$ e escrevendo os coeficientes na forma de números binomiais, obtemos

$$\begin{aligned} P'''(0) &= 3!\binom{2025}{3}Q(0)^{2022}Q'(0)^3 \\ &\quad + 3!\binom{2025}{2}Q(0)^{2023}Q'(0)Q''(0) \\ &\quad + \binom{2025}{1}Q(0)^{2024}Q'''(0). \end{aligned}$$

Calculando as três primeiras derivadas de Q, chegamos facilmente às relações (verifique!)

$$Q(0) = Q'(0) = 1,\ Q''(0) = 2 \ \text{ e } \ Q'''(0) = 3!.$$

Por fim, substituindo esses valores na expressão para $P'''(0)$, obtemos

$$\frac{P'''(0)}{3!} = \binom{2025}{3} + 2\binom{2025}{2} + \binom{2025}{1},$$

o coeficiente de x^3 em $P(x)$. $\square$

Observação 9. *Utilizando três vezes a relação de Stifel,*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

para $1 \le k \le n$, também podemos expressar o coeficiente de x^3 em $P(x)$ como $\binom{2027}{3}$.

Estendendo uma observação anterior, dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **duas vezes continuamente derivável**, ou **de classe C^2**, se f for duas vezes derivável, com $f'' : I \to \mathbb{R}$ contínua.

Exemplo 10 (OBMU - 2021). *Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, tais que $f(t)^2 = f(t\sqrt{2})$ para todo real t.*

Solução. A função identicamente nula é uma solução. Supondo $f \not\equiv 0$, provaremos que $f(t) = e^{kt^2}$ para todo t real e alguma constante real k.

Substituindo t por $t\sqrt{2}$ na relação do enunciado, obtemos $f(2t) = f(t\sqrt{2})^2$, de sorte que

$$f(2t) = f(t)^4, \ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Derivando a relação anterior, segue da regra da cadeia que

$$2f'(2t) = 4f(t)^3 f'(t),$$

o que implica

$$f(t)f'(2t) = 2f(t)^4 f'(t).$$

Daí, segue de (5) que

$$f(t)f'(2t) = 2f(2t)f'(t) \tag{6}$$

para cada t.

Gostaríamos de dividir cada membro da relação anterior por $f(t)f(2t)$. Isso é possível, de acordo com a seguinte

`Afirmação`. Se $f \not\equiv 0$, então $f > 0$.

Com efeito, temos $f \geq 0$, pois $f(t) = f(t/\sqrt{2})^2 \geq 0$ para todo t. A justificativa da afirmação seguirá da fórmula

$$f(t/2^n) = \sqrt[4^n]{f(t)}, \tag{7}$$

válida para todo t real e para cada n natural, e que será provada, a seguir, por indução.

O caso $n = 1$ é uma consequência de (5) com $t/2$ no lugar de t. Para o passo de indução, suponha (7) válida para um certo n natural. Substituindo t por $t/2$ em (7) e utilizando a base de indução, ficamos com

$$f(t/2^{n+1}) = \sqrt[4^n]{f(t/2)} \quad = \sqrt[4^n]{\sqrt[4]{f(t)}} = \sqrt[4^{n+1}]{f(t)},$$

como queríamos.

Agora, como $f(t) \geq 0$ para todo t e $f \not\equiv 0$, devemos ter $f(t_0) > 0$ para algum t_0 real. Substituindo t por t_0 em (7) e fazendo $n \to +\infty$, concluímos que

$$f(0) = \lim_{n \to +\infty} f(t_0/2^n) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[4^n]{f(t_0)} = 1.$$

Se fosse $f(t) = 0$ para algum t, teríamos, ainda por (7), $f(t/2^n) = 0$ para todo n natural, o que, fazendo $n \to +\infty$, daria $f(0) = 0$, uma contradição. Isso encerra a demonstração da afirmação. $\square$

Retornando à relação (6) e definindo $g := f'/f$, podemos escrever

$$g(2t) = \frac{f'(2t)}{f(2t)} = \frac{2f'(t)}{f(t)} = 2g(t)$$

para todo t, sendo g derivável (pois f é duas vezes derivável). Pela observação feita no 5º parágrafo da seção *Dicas para o Professor* da 2ª parte dessa aula, g é linear, digamos, $g(t) = 2kt$. Sendo g a derivada logarítmica de f, segue que

$$\frac{d(\ln f(t))}{dt} = \frac{d(kt^2)}{dt},$$

de modo que $\ln f(t) = kt^2 + l$, para alguma constante l. Como $f(0) = 1$, vemos que $l = 0$. Assim, $f(t) = e^{kt^2}$ para todo t.

Resumindo, o conjunto-solução da equação funcional dada consiste da função identicamente nula e de todas as funções reais de uma variável real f de regra $f(t) = e^{kt^2}$. $\square$

Observação 11. *Perceba que a hipótese de continuidade da* $2^{\underline{a}}$ *derivada não foi utilizada na solução do exemplo anterior. Em compensação, um resultado relativamente forte foi invocado para garantir a linearidade da função g (a derivada logarítmica de f). Alternativamente, um caminho natural para se deparar com aquela hipótese consiste em derivar a igualdade $g(2t) = 2g(t)$, obtendo a relação funcional $g'(2t) = g'(t)$. Como um exercício instrutivo, o leitor é convidado a mostrar que as únicas soluções* contínuas $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *da equação funcional $\varphi(2t) = \varphi(t)$ são as constantes* [3]. *Daí, sendo g' contínua (pois $g' = (f''f - (f')^2)/f^2$ e f'' é contínua), esse fato garante que g' é constante, ou seja, g é afim. Sendo $g(0) = 0$, segue que g é linear.*

Dicas para o Professor

Uma solução bem mais trabalhosa do exemplo 1 seria expandir os quadrados na expressão definindo $P(x)$, derivar e avaliar no ponto 1. Essa abordagem para composições de n fatores $f \circ \ldots \circ f$ torna-se cada vez menos vantajosa à medida que n cresce, evidenciando o benefício computacional do uso da regra da cadeia nesses casos.

Em relação ao exemplo 8, há um argumento algébrico que permite uma solução diferente (e elegante). De fato, pela propriedade distributiva, um termo x^3 é gerado no produto (com 2025 fatores)

$$(x^{2024} + \ldots + x^2 + x + 1) \ldots (x^{2024} + \ldots + x^2 + x + 1)$$

[3] Adapte a observação feita no $6^{\underline{o}}$ parágrafo da seção *Dicas para o Professor* da $2^{\underline{a}}$ parte dessa aula.

se, e somente se, escolhermos monômios $x^{i_1}, \ldots, x^{i_{2025}}$, nos respectivos fatores, de tal modo que

$$i_1 + \ldots + i_{2025} = 3. \tag{8}$$

Daí, o número de tais monômios x^3, que nada mais é que o coeficiente procurado, é expresso pela quantidade de soluções em inteiros não negativos da equação (8). Por outro lado, utilizando permutações com repetições [4], não é difícil concluir que o número de tais soluções é $\binom{2025+3-1}{3} = \binom{2027}{3}$.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. A. C. O. Morgado. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade.* 1ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

3. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

4. M. Spivak. *Calculus.* 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.

[4] Confira a seção 2.6 de [2].