

Material Teórico-Módulo Geometria Espacial 3

Esfera - Parte III

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Antonio Caminha M. Neto

6 de Novembro de 2024



PORTAL DA
MATEMÁTICA
OBMEP

Este material apresenta uma demonstração do teorema de Euler distinta daquela discutida no material “Poliedros – Parte II” do módulo “Geometria Espacial 1 – Fundamentos”. Aqui, seguimos a discussão na referência [2].

Na primeira seção, após recordar a fórmula para o cálculo da área de uma esfera (vista no material “Esfera - Parte I”), calculamos a área de um fuso esférico e demonstramos o teorema de Girard sobre a área de triângulos esféricos. Em seguida, já na segunda seção, recordamos rapidamente o conceito de poliedro convexo para, enfim, provar o teorema de Euler como aplicação do teorema de Girard.

1 O teorema de Girard

Começamos recordando que área A de uma esfera de raio R é calculada pela fórmula abaixo:

$$A = 4\pi R^2. \quad (1)$$

Agora, seja Σ a esfera de centro O e raio R . Para $\theta \in (0, \pi)$, definimos um **fuso esférico** de abertura θ em Σ como a interseção de Σ com um diedro de abertura θ , cuja aresta contém um diâmetro de Σ :

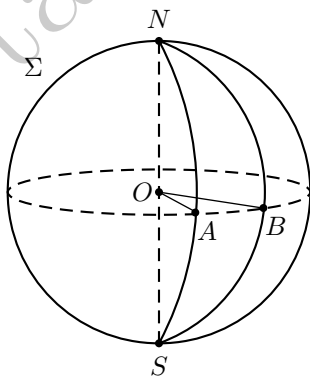


Figura 1: fuso esférico de abertura θ .

Na figura acima, mostramos um fuso esférico de abertura $A\widehat{O}B = \theta$, limitado pelos arcos de grande círculo $N\widehat{A}S$ e $N\widehat{B}S$.

Para uso posterior, precisamos da fórmula para a área de um fuso esférico dada pelo lema a seguir. Para sua demonstração, utilizaremos o fato de que todo número irracional α pode ser aproximado, *por falta e por excesso*, por números racionais; mais precisamente, existe sequências $(r_j)_{j \geq 1}$ e $(s_j)_{j \geq 1}$ de racionais positivos, tais que

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < \alpha < \dots < s_2 < s_1$$

e $r_j, s_j \rightarrow \alpha$ à medida que $j \rightarrow +\infty$.

Lema 1. *Sejam Σ a esfera de centro O e raio R e $\theta \in (0, \pi)$. Se \mathcal{F} é um fuso esférico de abertura θ em Σ , então*

$$A(\mathcal{F}) = 2\theta R^2.$$

Prova. Se $\theta = \frac{2\pi}{n}$, para algum natural $n > 2$, então Σ pode ser particionada em n fusos esféricos de abertura θ , de forma que

$$A(\mathcal{F}) = \frac{1}{n}A(\Sigma) = \frac{1}{n} \cdot 4\pi R^2 = 2\theta R^2.$$

Se $\theta = \frac{2\pi m}{n}$, para $m < n$ naturais, então \mathcal{F} pode ser particionado em m fusos esféricos de abertura $\frac{\theta}{m} = \frac{2\pi}{n}$, cada um dos quais com área $\frac{1}{m} \cdot 2\theta R^2$. Portanto,

$$A(\mathcal{F}) = m \cdot 2 \frac{\theta}{m} R^2 = 2\theta R^2.$$

Por fim, se $\alpha = \frac{\theta}{2\pi} \in (0, \frac{1}{2})$ for irracional, escolha sequências $(r_j)_{j \geq 1}$ e $(s_j)_{j \geq 1}$ de racionais positivos, tais que

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < \alpha < \dots < s_2 < s_1 < \frac{1}{2}$$

e $r_j, s_j \rightarrow \alpha$ à medida que $j \rightarrow +\infty$. Para cada $j \geq 1$, tome fusos esféricos \mathcal{F}_j e \mathcal{F}'_j , de aberturas respectivamente iguais a $2\pi r_j$ e $2\pi s_j$, tais que

$$\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'_j.$$

Então,

$$A(\mathcal{F}_j) \leq A(\mathcal{F}) \leq A(\mathcal{F}'_j)$$

e segue do que fizemos acima que

$$4\pi r_j R^2 \leq A(\mathcal{F}) \leq 4\pi s_j R^2.$$

Fazendo $j \rightarrow +\infty$, segue que

$$A(\mathcal{F}) = 4\pi\alpha R^2 = 2\theta R^2.$$

□

Considere novamente a esfera Σ , de centro O e raio R . Um **triângulo esférico** em Σ é uma união $\widehat{A_1A_2} \cup \widehat{A_2A_3} \cup \widehat{A_1A_3}$, onde $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$ e $\widehat{A_1A_3}$ são arcos de grandes círculos em Σ , de medidas menores que π , e $A_i \widehat{A_{i+1}} \cap A_j \widehat{A_{j+1}} \neq \emptyset$ se, e só se, $i = j - 1$, j ou $j + 1$ (com a convenção de que $A_0 = A_3$ e $A_4 = A_1$). Nesse caso, dizemos que os pontos A_1 , A_2 e A_3 são os **vértices** e os arcos $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_1A_3}$ e $\widehat{A_2A_3}$ são os **lados** do triângulo esférico. Sempre que não houver perigo de confusão, nos referiremos ao triângulo esférico acima simplesmente por $A_1A_2A_3$. (Para acompanhar, veja, na figura 2, o triângulo esférico ABC .)

Um triângulo esférico $A_1A_2A_3$ em Σ a divide em duas partes, exatamente uma das quais está contida em um hemisfério. Também nos referiremos a tal porção de Σ como o *triângulo esférico* $A_1A_2A_3$, e definiremos seu **ângulo interno** em A_i como a abertura θ_i do diedro formado pelos planos $(A_{i-1}A_iO)$ e $(A_iA_{i+1}O)$; em particular, $\theta_i \in (0, \pi)$.

O teorema a seguir é devido ao matemático francês Albert Girard (1595-1632).

Teorema 2 (Girard). *Seja Σ uma esfera de raio R . Se ABC é um triângulo esférico em Σ , com ângulos internos α , β e γ , então*

$$A(ABC) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2. \quad (2)$$

Prova. Sejam O o centro de Σ e A', B' e C' os simétricos de A, B e C em relação a O , respectivamente (figura 2). Sejam \mathcal{F}_A o fuso esférico que contém o triângulo ABC e é definido pelos planos (ABB') e (CBB') , e \mathcal{F}'_A o fuso esférico simétrico de \mathcal{F}_A em relação a $\overleftrightarrow{BB'}$. Definamos $\mathcal{F}_B, \mathcal{F}'_B, \mathcal{F}_C$ e \mathcal{F}'_C de modo análogo.

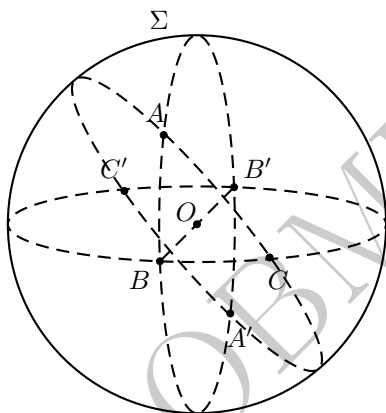


Figura 2: o teorema de Girard.

Como α, β e γ são as aberturas de $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B$ e \mathcal{F}_C , respectivamente (ou, ainda, aquelas de $\mathcal{F}'_A, \mathcal{F}'_B$ e \mathcal{F}'_C), segue do lema anterior que

$$A(\mathcal{F}_A) = A(\mathcal{F}'_A) = 2\alpha R^2, \quad A(\mathcal{F}_B) = A(\mathcal{F}'_B) = 2\beta R^2$$

e

$$A(\mathcal{F}_C) = A(\mathcal{F}'_C) = 2\gamma R^2.$$

Mas, como

$$\begin{aligned} \Sigma &= (\mathcal{F}_A \setminus ABC) \cup (\mathcal{F}'_A \setminus A'B'C') \cup (\mathcal{F}_B \setminus ABC) \\ &\quad \cup (\mathcal{F}'_B \setminus A'B'C') \cup (\mathcal{F}_C \setminus ABC) \cup (\mathcal{F}'_C \setminus A'B'C') \\ &\quad \cup ABC \cup A'B'C', \end{aligned}$$

com as parcelas do segundo membro sem pontos interiores em comum, obtemos que

$$\begin{aligned}
 A(\Sigma) &= A(\mathcal{F}_A \setminus ABC) + A(\mathcal{F}'_A \setminus A'B'C') + A(\mathcal{F}_B \setminus ABC) \\
 &\quad + A(\mathcal{F}'_B \setminus A'B'C') + A(\mathcal{F}_C \setminus ABC) \\
 &\quad + A(\mathcal{F}'_C \setminus A'B'C') + A(ABC) + A(A'B'C') \\
 &= A(\mathcal{F}_A) + A(\mathcal{F}'_A) + A(\mathcal{F}_B) + A(\mathcal{F}'_B) + A(\mathcal{F}_C) \\
 &\quad + A(\mathcal{F}'_C) - 6A(ABC) + 2A(ABC) \\
 &= 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 - 4A(ABC).
 \end{aligned}$$

Por fim, basta substituir (1) no primeiro membro para obter o resultado desejado. \square

A seguir, estendemos o teorema de Girard à classe dos *polígonos esféricos convexos*, para o quê precisamos de alguns preliminares.

Dada uma esfera Σ , de centro O , uma *poligonal esférica simples fechada* de k lados em Σ é uma união $\widehat{A_1A_2} \cup \widehat{A_2A_3} \cup \dots \cup \widehat{A_{k-1}A_k} \cup \widehat{A_kA_1}$, onde, para $1 \leq j \leq k$ (com $A_{k+1} = A_1$), $\widehat{A_jA_{j+1}}$ é um arco de grande círculo de Σ , de medida menor que π , e $\widehat{A_iA_{i+1}} \cap \widehat{A_jA_{j+1}} \neq \emptyset$ se, e só se, $i = j - 1$, j ou $j + 1$. (Faça uma figura para acompanhar.)

Nesse caso, dizemos que os pontos A_1, A_2, \dots, A_k são os **vértices** e os arcos $\widehat{A_iA_{i+1}}$ (para $1 \leq i \leq k$) são os **lados** da poligonal. Sempre que não houver perigo de confusão, nos referiremos à poligonal esférica simples fechada acima simplesmente por $A_1A_2 \dots A_k$.

Uma poligonal esférica simples fechada $A_1A_2 \dots A_k$ em Σ a divide em duas partes, exatamente uma das quais está contida em um hemisfério de Σ . Tal parte é o **polígono esférico** delimitado pela poligonal $A_1A_2 \dots A_k$, ao qual nos referiremos, doravante, simplesmente por $A_1A_2 \dots A_k$. Ainda nesse caso, definimos o **ângulo interno** de $A_1A_2 \dots A_k$ em A_i como a abertura do diedro formado pelos planos $(A_{i-1}A_iO)$ e $(A_iA_{i+1}O)$.

De posse dos conceitos acima, podemos finalmente enunciar o corolário a seguir.

Corolário 3. *Seja Σ uma esfera de raio R . Se $A_1A_2\dots A_k$ é um polígono esférico em Σ , então*

$$A(A_1A_2\dots A_k) = \left(\sum_{i=1}^k \theta_i - (k-2)\pi \right) R^2,$$

onde θ_i é o ângulo interno de $A_1A_2\dots A_k$ em A_i .

Prova. Exercício. Particione $A_1A_2\dots A_k$ nos triângulos esféricos $A_1A_2A_i$, para $3 \leq i \leq k$; em seguida, aplique o teorema de Girard a cada um de tais triângulos. \square

2 O teorema de Euler

Dados, no espaço, um ponto P e um real positivo R , definimos a **bola aberta** de centro P e raio R como o conjunto

$$\mathcal{B}(P; R) = \{Q; PQ < R\}.$$

Seja \mathcal{A} um conjunto de pontos do espaço. Um ponto P do espaço é um **ponto interior** de \mathcal{A} se $\mathcal{B}(P; R) \subset \mathcal{A}$, para algum $R > 0$; em particular, $P \in \mathcal{A}$. O **interior** de \mathcal{A} é o subconjunto $\text{Int}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} , formado por seus pontos interiores.

O interior de um conjunto pode coincidir com o próprio conjunto, e nessa situação diremos que o conjunto é **aberto**. Por exemplo, o conjunto vazio e o espaço inteiro são abertos; a bola aberta $\mathcal{B}(P; R)$ também é um conjunto aberto, uma vez que, se $Q \in \mathcal{B}(P; R)$, então, para $r = R - PQ > 0$, temos $\mathcal{B}(Q; r) \subset \mathcal{B}(P; R)$.

Um conjunto \mathcal{A} de pontos do espaço é **fechado** se seu complementar \mathcal{A}^c for aberto. Assim, o espaço inteiro e o conjunto vazio são fechados; também, o conjunto

$$\mathcal{B}(P; R)^c = \{Q; PQ \geq R\}$$

é fechado, uma vez que seu complementar é a bola aberta $\mathcal{B}(P; R)$, o qual é, como vimos, um conjunto aberto. Outro exemplo de conjunto fechado é fornecido pela **bola fechada** $\overline{\mathcal{B}(P; R)}$, onde

$$\overline{\mathcal{B}(P; R)} = \{Q; PQ \leq R\}.$$

De fato, $\overline{\mathcal{B}(P; R)^c} = \{Q; PQ > R\}$; portanto, se $Q \in \overline{\mathcal{B}(P; R)^c}$ e $r = PQ - R > 0$, então $\mathcal{B}(Q; r) \subset \overline{\mathcal{B}(P; R)^c}$, de sorte que $\overline{\mathcal{B}(P; R)^c}$ é aberto.

Consideremos novamente um conjunto \mathcal{A} de pontos do espaço. Um ponto P do espaço é um **ponto de fronteira** de \mathcal{A} se, para todo $R > 0$, a bola $\mathcal{B}(P; R)$ intersectar tanto \mathcal{A} quanto \mathcal{A}^c . A **fronteira** de \mathcal{A} é o conjunto $\partial\mathcal{A}$, formado pelos pontos de fronteira de \mathcal{A} .

A fronteira de um conjunto pode ser inteiramente formada por pontos que não pertencem ao conjunto. Para exemplificar, mostremos que $\partial\mathcal{B}(P; R) = \Sigma(P; R)$, a esfera de centro P e raio R . De fato, nossas discussões anteriores garantem que nenhum ponto de $\mathcal{B}(P; R) \cup \overline{\mathcal{B}(P; R)^c}$ pertence à fronteira de $\mathcal{B}(P; R)$; por outro lado, para todo $Q \in \Sigma(P; R)$, temos $Q \in \mathcal{B}(P; R)^c$ e é imediato verificar que, para todo $r > 0$, $\mathcal{B}(Q; r)$ intersecta $\mathcal{B}(P; R)$.

O resultado a seguir relaciona os conceitos de conjunto fechado e fronteira.

Lema 4. *Um conjunto \mathcal{A} de pontos do espaço é fechado se, e só se, $\partial\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Ademais, nesse caso temos*

$$\mathcal{A} = \text{Int}(\mathcal{A}) \cup \partial\mathcal{A}.$$

Prova. Suponhamos, inicialmente, que \mathcal{A} é fechado, e mostremos que $\partial\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c = \emptyset$. De fato, como \mathcal{A}^c é aberto, se $P \in \mathcal{A}^c$, então existe $R > 0$ tal que $\mathcal{B}(P; R) \subset \mathcal{A}^c$; em particular, $P \notin \partial\mathcal{A}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\partial\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ e mostremos que \mathcal{A}^c é aberto. Tomemos, portanto, um ponto P em \mathcal{A}^c e mostremos que P é um ponto do interior de \mathcal{A}^c . Para tanto, observe inicialmente que, se a bola $\mathcal{B}(P; R)$ intersectar tanto \mathcal{A} quanto \mathcal{A}^c , para todo $R > 0$, teremos que $P \in \partial\mathcal{A}$ e, daí, $P \in \mathcal{A}$; mas isso contradiz o fato de que $P \in \mathcal{A}^c$. Logo, existe $R > 0$ tal que $\mathcal{B}(P; R)$ intersecta no máximo um dos conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{A}^c . Mas, como $P \in \mathcal{B}(P; R) \cap \mathcal{A}^c$, temos que $\mathcal{B}(P; R)$ intersecta somente \mathcal{A}^c ; por outro lado, como $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c$ é o espaço inteiro, segue que $\mathcal{B}(P; R) \subset \mathcal{A}^c$.

Para o que falta, seja \mathcal{A} um conjunto fechado. Segue da primeira parte que $\text{Int}(\mathcal{A}) \cup \partial\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Agora, tomemos $P \in \mathcal{A}$ e mostremos que $P \in \text{Int}(\mathcal{A}) \cup \partial\mathcal{A}$, para o quê há dois casos a considerar:

- Existe $R > 0$ tal que $\mathcal{B}(P; R) \subset \mathcal{A}$: nesse caso, $P \in \text{Int}(\mathcal{A})$.
- Para todo $R > 0$, temos $\mathcal{B}(P; R) \not\subset \mathcal{A}$: nesse caso, como $P \in \mathcal{A}$, é imediato que $P \in \partial\mathcal{A}$.

□

Estamos finalmente em condições de apresentar a seguinte

Definição 5. Um **poliedro** é um conjunto fechado e limitado do espaço, com interior não vazio e cuja fronteira consiste da união de um número finito de polígonos satisfazendo as condições a seguir:

- (a) Dois polígonos quaisquer não estão contidos em um mesmo plano.
- (b) Se dois polígonos se intersectam, então eles têm um vértice ou um lado comum.
- (c) Se dois polígonos \mathcal{P} e \mathcal{Q} não se intersectam, então existem polígonos $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k = \mathcal{Q}$, tais que \mathcal{P}_i e \mathcal{P}_{i+1} se intersectam, para $1 \leq i < k$.

Um poliedro é **convexo** se for um subconjunto convexo do espaço.

As pirâmides e prismas que estudamos anteriormente são exemplos de poliedros convexos.

De acordo com o lema 4, temos $\partial\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, para todo poliedro \mathcal{P} . Por vezes, nos referiremos a $\partial\mathcal{P}$ como a **superfície** de \mathcal{P} e aos polígonos que a compõem como as **faces** de \mathcal{P} . As **arestas** (resp. **vértices**) de \mathcal{P} são os lados (resp. vértices) de suas faces.

Precisamos, agora, do seguinte resultado preliminar, para cuja prova faremos uso do conceito de *supremo* de um conjunto de números reais (veja, por exemplo, a seção 2.1 de [1]).

Proposição 6. *Sejam \mathcal{P} um poliedro convexo, O um ponto em seu interior e Σ uma esfera centrada em O . Para todo ponto $P \in \Sigma$, a semirreta \overrightarrow{OP} intersecta $\partial\mathcal{P}$ em um único ponto Q . Ademais, a função*

$$P \in \Sigma \mapsto Q \in \partial\mathcal{P}$$

assim definida é uma bijeção.

Prova. Para $P \in \Sigma$, mostremos inicialmente que \overrightarrow{OP} intersecta $\partial\mathcal{P}$ em um único ponto. Para tanto, note inicialmente que o conjunto

$$\{X \in \overrightarrow{OP}; X \neq O \text{ e } OX \subset \mathcal{P}\}$$

é não vazio (pois O pertence ao interior de \mathcal{P}) mas não coincide com \overrightarrow{OP} (pois \mathcal{P} é limitado). Denotando $OX = x$, a discussão acima garante que

$$d := \sup\{x; X \in \overrightarrow{OP} \text{ e } OX \subset \mathcal{P}\}$$

está bem definido. Se $Q \in \overrightarrow{OP}$ é o único ponto tal que $OQ = d$, afirmamos que $Q \in \partial\mathcal{P}$. Para tanto, pelo lema 4 é suficiente excluirmos as possibilidades $Q \in \text{Int}(\mathcal{P})$ e $Q \in \mathcal{P}^c$, o que fazemos a seguir:

- se $Q \in \text{Int}(\mathcal{P})$, tome $R > 0$ tal que $\mathcal{B}(Q; R) \subset \mathcal{P}$ e, em seguida, um ponto $T \in \overrightarrow{OQ} \cap \mathcal{B}(Q; R)$, tal que $Q \in OT$. Então $T \in \overrightarrow{OP}$, $OT \subset \mathcal{P}$ e $OT > OQ = d$, contradizendo a definição de d .
- se $Q \in \mathcal{P}^c$ (que é aberto), tome $R > 0$ tal que $\mathcal{B}(Q; R) \subset \mathcal{P}^c$ e, em seguida, um ponto $T \in \overrightarrow{OQ} \cap \mathcal{B}(Q; R)$, tal que $T \in OQ$. Então $TQ \subset \mathcal{P}^c$, de sorte que $d \leq OT < OQ = d$, uma nova contradição.

Resta mostrar que, para $P \in \Sigma$, a semirreta \overrightarrow{OP} intersecta $\partial\mathcal{P}$ em um único ponto. Por contradição, suponha que \overrightarrow{OP} intersectasse $\partial\mathcal{P}$ em Q e Q' , com $Q \neq Q'$. Suponha que $Q' \in OQ$ (o outro caso é análogo). Como $P \in \text{Int}(\mathcal{P})$ e $Q \in \mathcal{P}$, segue facilmente que $Q' \in \text{Int}(\mathcal{P})$, o que é uma contradição.

Por fim, para $Q \in \partial\mathcal{P}$, é claro que \overrightarrow{OQ} intersecta Σ em um único ponto; portanto, a função do enunciado também é sobrejetiva. □

Dado um poliedro \mathcal{P} (não necessariamente convexo), denotamos respectivamente por V , A e F seus números de vértices, arestas e faces, e por

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = V - A + F$$

a **característica de Euler** de \mathcal{P} .

Para provar o teorema de Euler, precisaremos de um resultado auxiliar, útil em si mesmo.

Lema 7. *Se um poliedro tem A arestas e F_k faces de k lados, então*

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

Prova. Como cada aresta do poliedro pertence a exatamente duas faces, basta observar que ambos os membros da igualdade do enunciado contam cada aresta exatamente duas vezes. □

Teorema 8 (Euler). *Todo poliedro convexo tem característica de Euler igual a 2.*

Prova. Sejam \mathcal{P} um poliedro convexo, O um ponto em seu interior, Σ uma esfera de centro O e

$$\begin{aligned} f : \partial\mathcal{P} &\longrightarrow \Sigma \\ Q &\longmapsto Q' \end{aligned}$$

a inversa da bijeção definida pela proposição anterior, de sorte que f também é uma bijeção.

Se $A_1A_2 \dots A_k$ é uma face de \mathcal{P} , afirmamos que

$$A'_1A'_2 \dots A'_k = f(A_1A_2 \dots A_k)$$

é um polígono esférico em Σ . De fato (figura 3), é imediato que $f(A_iA_{i+1})$ é um arco de grande círculo em Σ , ligando A'_i e A'_{i+1} . Por outro lado, se α é o plano que passa por O e é paralelo ao plano da face $A_1A_2 \dots A_k$, então $A'_1A'_2 \dots A'_k$ está contido no hemisfério de Σ contido no mesmo semiespaço que $A_1A_2 \dots A_k$ em relação a α .

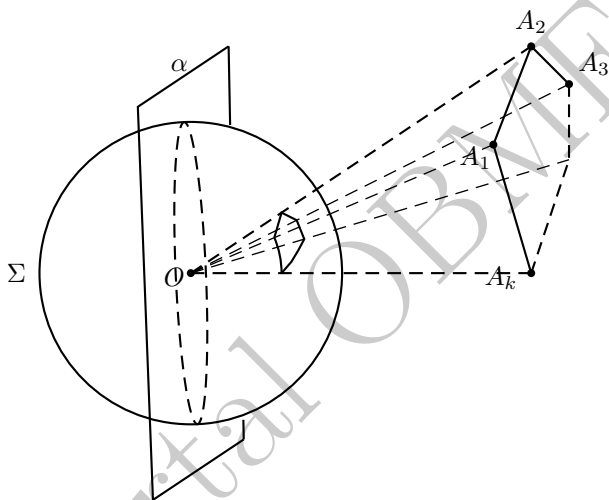


Figura 3: o efeito da função f .

Se θ_i é o ângulo interno de $A'_1A'_2 \dots A'_k$ em A'_i , segue do corolário 3 que

$$A(A'_1A'_2 \dots A'_k) = \left(\sum_{i=1}^k \theta_i - (k-2)\pi \right) R^2, \quad (3)$$

onde R é o raio de Σ .

Agora, somemos ambos os membros da igualdade acima sobre todos os polígonos esféricos convexos obtidos a partir das faces de \mathcal{P} :

- para a soma dos primeiros membros, observe que, como f é uma bijeção, os polígonos esféricos $A'_1 A'_2 \dots A'_k$ particionam Σ , de sorte que a soma de suas áreas é igual à área S de Σ .
- para a soma dos segundos membros, observe inicialmente que, se um vértice A de \mathcal{P} pertence às faces $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_j$ e $\mathcal{F}'_i = f(\mathcal{F}_i)$ para $1 \leq i \leq j$, então a soma dos ângulos internos dos polígonos esféricos convexos \mathcal{F}'_i em A' é igual a 2π . Por outro lado, se F_k denota, para $k \geq 3$, o número de faces de \mathcal{P} com k vértices, então $F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots$ a soma dos segundos membros de (3) é sucessivamente igual a

$$\begin{aligned} & \left(2\pi V - \sum_{k \geq 3} (k-2)\pi F_k \right) R^2 = \\ & = \left(2V - \sum_{k \geq 3} k F_k + 2F \right) \pi R^2 \\ & = (2V - 2A + 2F) \pi R^2, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o resultado do lema 7.

Mas, como somas de parcelas iguais dão totais iguais, concluímos a partir dos argumentos acima que

$$S = (V - A + F) \cdot 2\pi R^2$$

ou, ainda, $V - A + F = 2$. □

Dicas para o Professor

Esse material demanda uma maturidade bem maior por parte do leitor. Caso o professor decida abordá-lo com estudantes (talvez como projeto para uma feira de Ciências e Matemática), sugerimos compor mais figuras do que fizemos aqui, a fim de garantir que todos compreenderam as situações envolvidas. Dito isto, uma turma com a maturidade adequada pode ser apresentada ao material aqui reunido em duas ou três sessões de 50 minutos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, segunda edição. Rio de Janeiro, SBM, Coleção Profmat, 2022.
2. A. Caminha. *Geometria*, segunda edição. Rio de Janeiro, SBM, Coleção Profmat, 2022.