Material Teórico - Módulo Progressões Geométricas

Progressões Geométricas: Exercícios de Fixação

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Exercícios de Fixação

Este material discute alguns exercícios clássicos envolvendo os conceitos sobre progressões geométricas discutidos na aula anterior.

Exemplo 1. *Sabendo que a sequência* $(x+1, x+3, x+4, \ldots)$ *é uma PG de termos não nulos, calcule o seu quarto termo.*

Solução. Como a sequência em questão é uma PG, temos:

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+4}{x+3}.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}(x+3)^2 = (x+1)(x+4) &\Rightarrow \cancel{x^2} + 6x + 9 = \cancel{x^2} + 5x + 4 \\ &\Rightarrow x = -5.\end{aligned}$$

Portanto, os três primeiros termos da PG são -4, -2 e -1, ao passo que sua razão é $q = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$. Desse modo, o quarto termo é dado por

$$a_4 = q \cdot a_3 = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}.$$

□

Exemplo 2. *Seja* $(a_k)_{k\geq 1}$ *uma sequência de números reais não nulos. Prove que ela é uma PG se, e só se,*

$$a_{k+2}a_k = a_{k+1}^2, \forall\, k \geq 1.$$

Prova. Por definição, a sequência é uma PG (de razão q) se e só se

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = q,$$

i.e., se e só se, para todo $k \geq 1$ inteiro, tivermos

$$\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Multiplicando em $\times$, obtemos a relação do enunciado. □

Exemplo 3. *Os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, quando ordenados do menor para o maior, formam uma progressão geométrica crescente. Calcule a razão dessa progressão.*

Solução. Denotando por x o comprimento do menor lado e por q a razão da PG, temos que os comprimentos dos lados do triângulo retângulo em questão são dados por x, qx, q^2x. Como a PG é crescente e a hipotenusa é o maior lado, temos $q > 1$, x e qx são os comprimentos dos catetos e q^2x é o comprimento da hipotenusa.

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\begin{aligned}x^2 + (qx)^2 = \left(q^2x\right)^2 &\Rightarrow x^2 + q^2x^2 = q^4x^2 \\ &\Rightarrow \cancel{x^2}\left(1+q^2\right) = q^4\cancel{x^2} \\ &\Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Resolvendo a equação biquadrada acima[1] (e levando em conta que $q^2 > 0$), obtemos sucessivamente $q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e, daí,

$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

□

A solução do exemplo anterior utilizou, em última análise, o fato de que toda PG de três termos pode ser escrita da forma

$$(x, qx, q^2x).$$

Utilizaremos essa representação já no próximo exemplo, que também apresenta outras dificuldades algébricas.

Exemplo 4. *A soma de três números em PG é* 19 *e a soma dos seus quadrados é* 133*. Encontre esses números.*

Solução. Como comentamos acima, denotamos a PG por (x, qx, q^2x). Agora, utilizando as hipóteses do enunciado, temos:

$$x + qx + q^2x = 19 \ \text{ e } \ x^2 + (qx)^2 + \left(q^2x\right)^2 = 133$$

ou, o que é o mesmo,

$$x\left(1+q+q^2\right) = 19 \ \text{ e } \ x^2(1+q^2+q^4) = 133. \tag{1}$$

A fim de resolver o sistema de equações formado pelas duas últimas igualdades acima, começamos elevando ambos os membros da primeira delas ao quadrado, para obter

$$x^2\left(1+q+q^2\right)^2 = 19^2 = 361.$$

Em seguida, dividimos membro a membro essa última equação com a segunda equação em (1), chegando a

$$\frac{\cancel{x^2}\left(1+q+q^2\right)^2}{\cancel{x^2}\left(1+q^2+q^4\right)} = \frac{361}{133} = \frac{19}{7}. \tag{2}$$

A partir desse ponto, não é conveniente simplesmente expandirmos o quadrado do numerador e multiplicar em $\times$ em seguida; se fizéssemos assim, obteríamos a *equação completa de quarto grau*

$$6q^4 - 7q^3 - q^2 - 7q + 6 = 0.$$

A alternativa é, então, lembrarmos que

$$q^3 - 1 = q^3 - 1^3 = (q-1)\left(q^2+q+1\right)$$

e

$$\begin{aligned}q^6 - 1 &= \left(q^2\right)^3 - 1^3 \\ &= \left(q^2-1\right)\left(\left(q^2\right)^2 + q^2 + 1\right) \\ &= \left(q^2-1\right)\left(q^4+q^2+1\right).\end{aligned}$$

[1] A esse respeito, veja por exemplo o material teórico da vídeo-aula *Equações de Segundo Grau: Outros Resultados Importantes*, do módulo *Equações de Segundo Grau* do nono ano.

Escrevendo as igualdades acima da forma

$$q^2+q+1=\frac{q^3-1}{q-1} \ \text{ e } \ q^4+q^2+1=\frac{q^6-1}{q^2-1}$$

e substituindo tais expressões em (2), obtemos

$$\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)^2\left(\frac{q^2-1}{q^6-1}\right)=\frac{19}{7}$$

ou, ainda,

$$\frac{\left(q^3-1\right)^2}{(q-1)^2}\cdot\frac{(q-1)(q+1)}{(q^3-1)\left(q^3+1\right)}=\frac{19}{7}.$$

Cancelando os fatores q^3-1 e $q-1$, obtemos a equação

$$\frac{\left(q^3-1\right)(q+1)}{(q^3+1)(q-1)}=\frac{19}{7}.$$

Agora, utilizando também a fatoração

$$q^3+1=(q+1)\left(q^2-q+1\right),$$

podemos reescrever a última equação acima como

$$\frac{\left(q^2+q+1\right)(q-1)(q+1)}{(q^2-q+1)(q+1)(q-1)}=\frac{19}{7}$$

ou, finalmente,

$$\frac{q^2+q+1}{q^2-q+1}=\frac{19}{7}.$$

Multiplicando em $\times$, vemos que essa última equação é equivalente à equação de segundo grau

$$6q^2-13q+6=0$$

que, resolvida, fornece $q=\frac{2}{3}$ ou $q=\frac{3}{2}$. Então, substituindo sucessivamente $q=\frac{2}{3}$ e $q=\frac{3}{2}$ na primeira equação de (1), obtemos respectivamente $x=9$ e $x=4$.

Portanto, os números procurados são 9, $9\cdot\frac{2}{3}=6$ e $6\cdot\frac{2}{3}=4$. □

Exemplo 5. *Em um país, a taxa de inflação é de 4% ao ano, enquanto a poupança rende 6% ao ano. Na virada do ano, João aplicou 100.000 na poupança. Pergunta-se:*

(a) Após quantos anos ele conseguirá dobrar o valor real do dinheiro aplicado?

(b) Mantendo o rendimento anual da poupança em 6%, mas reduzindo a inflação para 3% ao ano, qual a nova resposta do item (a)?

(c) E se a inflação média fosse de 10% ao ano (mas novamente mantendo o rendimento da poupança em 6% ao ano), qual seria o valor real do dinheiro aplicado por João após dez anos?

Solução. No item (a), como o rendimento anual real (taxa de crescimento) do dinheiro aplicado por João é de $6\%-4\%=2\%$, após n anos o valor real do capital de João será de

$$100.000\Big(1+\frac{2}{100}\Big)^n=100.000\Big(\frac{51}{50}\Big)^n.$$

Queremos encontrar o menor n de forma que esse valor seja pelo menos de 200.000. Portanto, é suficiente pedir que

$$\Big(\frac{51}{50}\Big)^n\geq 2.$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, observamos que o menor valor de n é 36, para o qual

$$100.000\Big(\frac{51}{50}\Big)^{36}\cong 203.988.$$

Em (b), um raciocínio análogo ao acima garante que, após n anos, o valor real dos 100.000 aplicados por João será de

$$100.000\Big(1+\frac{3}{100}\Big)^n=100.000\Big(\frac{103}{100}\Big)^n.$$

Então, queremos o menor n para o qual

$$\Big(\frac{103}{100}\Big)^n\geq 2,$$

e a calculadora mostra que $n=24$. Com tal valor de n, João terá após 24 anos (e em valores reais)

$$100.000\Big(\frac{103}{100}\Big)^{24}\cong 234.497.$$

Por fim, na situação do item (c), a depreciação anual real (taxa de crescimento) do dinheiro aplicado por João é de $6\%-10\%=-4\%$. Portanto, após n anos, o valor real do capital de João será de

$$100.000\Big(1-\frac{4}{100}\Big)^n=100.000\Big(\frac{24}{25}\Big)^n.$$

Para $n=10$ (e uma vez mais com o auxílio de uma calculadora científica), temos

$$100.000\Big(\frac{24}{25}\Big)^{10}=66.483.$$

□

Exemplo 6. *Prove que não existe uma PG que tenha os números 2, 3 e 5 como três de seus termos.*

Prova. Suponha que $(a_k)_{k\geq 1}$ seja uma PG de razão q, tal que $a_m=2$, $a_n=3$ e $a_p=5$, para certos naturais dois a dois distintos m, n e p. Então, pela fórmula para o termo geral, temos

$$a_1q^{m-1}=2,\quad a_1q^{n-1}=3 \ \text{ e } \ a_1q^{p-1}=5.$$

Dividindo membro a membro a primeira e a segunda igualdades acima, assim como a primeira e a terceira igualdades, obtemos respectivamente

$$q^{m-n} = \frac{2}{3} \ \text{ e } \ q^{m-p} = \frac{2}{5}.$$

Portanto,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{m-p} = q^{(m-n)(m-p)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{m-n}$$

ou, o que é o mesmo,

$$2^{n-p} \cdot 5^{m-n} = 3^{m-p}.$$

Por fim, a última igualdade acima contradiz o fato de que todo número natural maior que 1 admite apenas uma fatoração como produto de potências de primos. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para discutir os exemplos deste material. Caso o professor não disponha de todo esse tempo, recomendamos resolver pelo menos os exemplos 1, 2, 3 e 5. Este último é especialmente interessante, por mostrar de uma maneira simples o impacto negativo de uma taxa de inflação alta na economia.

As referências colecionadas a seguir contém muitos exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G. Iezzi, S. Hazzan. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas*. São Paulo, Atual Editora, 2012.

3. E. Lima, P. Carvalho, E. Wagner, A. Morgado, *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*, 5ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2004.