**Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2**

**Exercícios - Conceito de Função**

**Introdução ao Cálculo**

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**04 de abril de 2020**

Nesta aula, iremos resolver exercícios envolvendo a determinação do domínio, da imagem e a construção do gráfico de funções. Faremos isso usando apenas métodos "elementares", ou seja, sem empregar os recursos do Cálculo. Desenvolveremos as ferramentas necessárias a um estudo completo da variação de funções e do esboço de gráficos quando estudarmos a noção de *derivada*.

# 1 Exercícios

**Exemplo 1.** *Considere uma função $f$, dada por $f(x) = ax + b$, onde $a$ e $b$ são números reais fixados.*

(a) *Determine o maior domínio possível para $f$.*

(b) *Nas condições do item (a):*

i. *Avalie a injetividade e a sobrejetividade da função $f$, de acordo com o coeficiente $a$.*

ii. *Explique porque o gráfico de $f$ é uma reta.*

**Solução.** (a) Não há restrições para a variável $x$, ou seja, para qualquer número real $x$, $f(x) = ax + b$ é um número real bem definido, uma vez que estejam dados as constantes $a$ e $b$. Assim o maior domínio possível para $f$ é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

(b) Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i. Se $a = 0$, a função $f$ é constante, $f(x) = b$, logo não pode ser injetiva, pois todos os números reais são levados por $f$ em um único real, $b$. Neste caso, $f$ também não pode ser sobrejetiva, pois a imagem de $f$ tem um único elemento, $b$, enquanto o contradomínio é todo o conjunto $\mathbb{R}$.

Se $a \neq 0$, então $f$ é injetiva. De fato, se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ são tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $ax_1 + b = ax_2 + b$, o que implica $ax_1 = ax_2$ e, como $a \neq 0$, $x_1 = x_2$. Portanto, neste caso, $f$ é injetiva.

A função $f$ é sobrejetiva, se, e somente se, a equação $f(x) = c$ pode ser resolvida, para qualquer $c$ pertencente ao contradomínio de $f$. Em nosso caso, $f(x) = c$ é equivalente a $ax + b = c$ e, como $a \neq 0$, a $x = \frac{c-b}{a}$. Logo, $f\left(\frac{c-b}{a}\right) = a\left(\frac{c-b}{a}\right) + b = c - b + b = c$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$ dado, ou seja, $f$ é sobrejetiva.

ii. Consideremos pontos $A_1 = (x_1, f(x_1))$ e $A_2 = (x_2, f(x_2))$ pertencentes ao gráfico de $f$, com $x_1 \neq x_2$. Se $P = (x, f(x))$ é um terceiro ponto sobre o gráfico de $f$, com $x \neq x_1, x_2$, precisamos mostrar que $A_1$, $A_2$ e $P$ são *colineares*. Uma maneira simples de verificar isso é calcular os coeficientes angulares $m$ e $m'$ das retas que passam por $A_1$ e $A_2$ e por $A_1$ e $P$, respectivamente:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

e

$$m' = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{ax + b - ax_1 - b}{x - x_1} = \frac{a(x - x_1)}{x - x_1} = a.$$

Então, as retas $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ e $\overleftrightarrow{A_1P}$ têm o mesmo coeficiente angular, logo, são paralelas ou coincidentes. Mas, como ambas passam pelo ponto $A_1$, não podem ser paralelas. Portanto, $\overleftrightarrow{A_1A_2} = \overleftrightarrow{A_1P}$, o que é o mesmo que dizer que $A_1$, $A_2$ e $P$ são colineares.

Assim, todo ponto $P$ sobre o gráfico pertence à reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, de forma que o gráfico de $f$ *está contido* nessa reta. Vamos mostrar, agora, que o gráfico de $f$ é toda essa reta. Para tanto, dado um ponto $P = (x, y)$ sobre a reta $r$ determinada por $A_1$ e $A_2$, consideremos dois casos separadamente:

- Se $a = 0$, então $f(x_1) = f(x_2) = b$ e a reta $r$ é horizontal, logo $y = b = f(x)$, pois $f(x) = b$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Assim $P = (x, y) = (x, f(x))$ é um ponto do gráfico de $f$.

- Se $a \neq 0$, então, por um lado, $f(x_1) = ax_1 + b \neq ax_2 + b = f(x_2)$, de sorte que a reta $r = \overleftrightarrow{A_1A_2}$ não é horizontal. Por outro lado, já vimos que a função $f$ é sobrejetiva. Portanto, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y$, de modo que $P = (x, y) = (x, f(x_0))$. Como já vimos antes, todo ponto sobre o gráfico pertence à reta $r$; em particular, o ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ pertence a $r$. Como $P$ e $P_0$ têm a mesma ordenada, ambos pertencem à mesma reta horizontal $y = f(x_0)$, isto é, pertencem à interseção dessa reta horizontal com a reta (não horizontal) $r$, que é um conjunto unitário. Logo, $P = P_0 = (x_0, f(x_0))$ é um ponto do gráfico de $f$.

□

**Observação 2.** *Na solução do Exemplo 1, uma observação merece destaque:*

> *Uma função $f$ é sobrejetiva se, e somente se, a equação $f(x) = c$ tem solução, para qualquer $c$ pertencente ao contradomínio de $f$. Se, além disso, a solução for única, a função é bijetiva.*

Outra observação sobre funções afins que merece destaque é a colecionada no resultado a seguir.

**Teorema 3.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim, dada por $f(x) = ax + b$. São equivalentes:*

(1) *$a \neq 0$.*

(2) *$f$ é injetiva.*

(3) *$f$ é sobrejetiva.*

**Prova.** Na solução do Exemplo 1, vimos que, se $a \neq 0$, então $f$ é injetiva. Reciprocamente, se $a = 0$, então $f$ é constante, logo, não é injetiva. Isso é o mesmo que dizer que, se $f$ é injetiva, então $a \neq 0$. Logo, (1) e (2) são equivalentes.

Também vimos, na solução do Exemplo 1, que, se $a \neq 0$, então $f$ é sobrejetiva. Reciprocamente, se $a = 0$, então $f$ é constante, logo, não pode ser sobrejetiva. Isso é o mesmo que dizer que, se $f$ é sobrejetiva, então $a \neq 0$. Portanto, (1) e (3) também são equivalentes.

Por fim, como as afirmações (2) e (3) são ambas equivalentes a (1), também são equivalentes entre si. $\square$

**Exemplo 4.** *Considere a função $f$, dada por*

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

*Determine o maior domínio possível para $f$ e, nesse caso, seu gráfico.*

**Solução.** A função $f$ não está definida para $x = 3$, pois a substituição de $x$ por 3 anula o denominador da fração que define $f(x)$. Para os demais números reais, $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ está bem definida, logo, o domínio maximal de $f$ é o conjunto $\mathbb{R} - \{3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$. Por outro lado, se $x \neq 3$, podemos escrever

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3.$$

Então, para $x \neq 3$, o gráfico de $f$ coincide com o gráfico da função afim $x \mapsto x + 3$, que é uma reta. Isso significa que o gráfico de $f$ é uma reta da qual foi retirado o ponto $(3, 6)$, o qual é obtido quando $x = 3$.

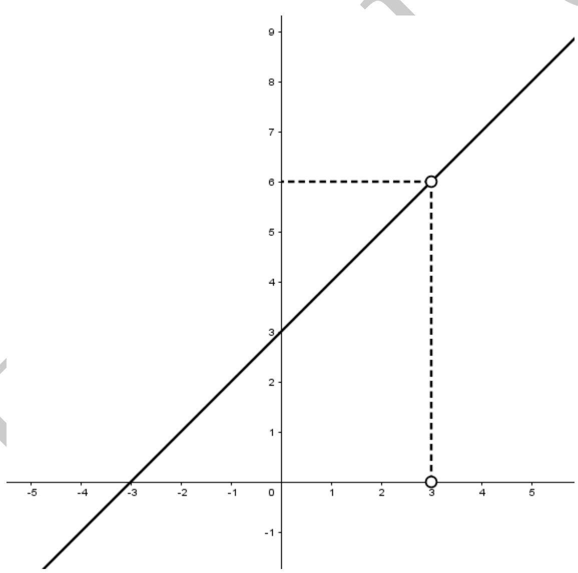


Figura 1: gráfico da função $f$.

$\square$

**Observação 5.** *O ponto onde a função $f$ não está definida é chamado de* singularidade *de $f$. No caso do exemplo 4, a sigularidade pode ser* removida *considerando a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & se \quad x \neq 3 \\ 6 & se \quad x = 3 \end{cases}.$$

*A função $g$ coincide com a função $f$ em todos os pontos onde $f$ está definida, ou seja, $g(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{3\}$. Além disso, a função $g$ está definida para $x = 3$ e, neste ponto,* assume o valor que deveria assumir*, isto é, se $x$ é um número real próximo de 3, então $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = x + 3$ é um número real próximo de 6.*

No Exemplo 2 da aula sobre função inversa, neste módulo, discutimos a deteminação do maior domínio possível e da imagem da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. No módulo *Funções - Parte 1*, aula *Monotonicidade, Máximos e Mínimos*, Proposição 7, também estudamos funções quadráticas e aprendemos como calcular seu valor extremo, reconhecendo-o como máximo ou mínimo.

Quando estudamos as funções quadráticas, é comum ouvirmos que "o gráfico da função quadrática é uma parábola". Mas o que é mesmo uma parábola? Há uma definição simples desse tipo de curva como lugar geométrico, ou seja, como o conjunto dos pontos que têm em comum uma mesma propriedade geométrica.

> Fixada uma reta $r$ e um ponto $F$, com $F \notin r$, a **parábola** de **foco** $F$ e **diretriz** $r$ é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de $F$ e de $r$.

Vamos assumir aqui alguns fatos sobre a geometria da parábola:

- A parábola tem um eixo de simetria e esta reta é perpendicular à diretriz da parábola.
- O foco da parábola pertence ao eixo de simetria.

**Exemplo 6.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

*com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Mostre que o gráfico de $f$ é uma parábola e encontre as coordenadas do foco e a equação da diretriz dessa perábola.*

**Solução.** Vamos começar com o caso mais simples, em que $f(x) = ax^2$, ou seja, $b = c = 0$. Para mostrarmos que esse gráfico é uma parábola, devemos encontrar as coordenadas do foco e a equação da diretriz. Neste caso, o gráfico de $f$ é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, o que indica, de acordo com as observações que fizemos acima sobre a geometria da parábola, que o foco deve ser um ponto sobre esse eixo e a diretriz deve ser uma reta horizontal.

Seja $F = (0, y_0)$ um ponto sobre o eixo das ordenadas, e $y = d$ a equação de uma reta horizontal $r$. Vamos mostrar que, para uma escolha adequada de $y_0$ e $d$, cada ponto $P = (x, ax^2)$ sobre o gráfico da função $f$ está à mesma distância de $F$ e de $r$. Com isso, poderemos concluir que o gráfico de $f$ é, de fato, uma parábola.

A igualdade entre as distâncias, descrita no parágrafo anterior, pode ser expressa como

$$\sqrt{(x-0)^2 + (ax^2 - y_0)^2} = |ax^2 - d|. \tag{2}$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$x^2 + (ax^2 - y_0)^2 = (ax^2 - d)^2.$$

Desenvolvendo os quadrados na expressão acima, ficamos com a igualdade

$$a^2x^4 + (1 - 2ay_0)x^2 + y_0^2 = a^2x^4 - 2adx^2 + d^2.$$

Como a igualdade acima tem de ser verdadeira para todo valor real de $x$, os coeficientes de potências de $x$ de mesmo grau, em ambos os membros, têm de ser iguais. Comparando tais coeficientes, concluímos que

$$1 - 2ay_0 = -2ad \;\text{ e }\; y_0^2 = d^2.$$

Dessa última igualdade, segue que $d = y_0$ ou $d = -y_0$. Se $d = y_0$, da primeira igualdade resultaria que $1 - 2ay_0 = -2ay_0$, o que não pode ocorrer. Logo, $d = -y_0$ e, substituindo em $1 - 2ay_0 = -2ad$, obtemos $4ay_0 = 1$, ou seja, $y_0 = \frac{1}{4a}$, $d = -y_0 = -\frac{1}{4a}$. Dessa forma, o gráfico da função dada por $f(x) = ax^2$ é uma parábola, com foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = -\frac{1}{4a}$.

No caso geral, se $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, recordamos a **forma canônica**

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Em termos de gráficos, a forma canônica significa que, no caso geral, o gráfico de $f$ pode ser obtido a partir da parábola $y = ax^2$, fazendo-se uma translação horizontal, que corresponde a somar $\frac{b}{2a}$, seguida por uma translação vertical, que corresponde a somar $-\frac{\Delta}{4a^2}$. Como translações de uma parábola continuam sendo parábolas, podemos concluir que o gráfico de uma função quadrática sempre é uma parábola. Além disso, as translações que descrevemos acima implicam facilmente que, no caso geral, o foco é o ponto

$$F = \left(0 - \frac{b}{2a}\,\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = \left(-\frac{b}{2a}\,\frac{a - \Delta}{4a^2}\right)$$

e a diretriz é a reta horizontal de equação

$$y = -\frac{1}{4a} + \frac{-\Delta}{4a^2} = -\frac{a + \Delta}{4a^2}.$$

□

**Observação 7.** *Dada uma parábola qualquer, podemos escolher um sistema de eixos tal que o eixo das ordenadas coincida com o eixo de simetria da parábola e o vértice da parábola seja a origem do sistema. Se fizermos essa escolha, a função correspondente, $f(x) = ax^2 + bx + c$, deve ter $c = 0$, pois o gráfico passa pela origem, e ter apenas uma raiz real, de multiplicidade 2, logo, $0 = \Delta = b^2 - 4ac = b^2$, ou seja, $b = 0$. Assim, toda parábola é gráfico de uma função dada por $f(x) = ax^2$, para uma escolha adequada de um sistema de eixos.*

**Exemplo 8.** *Encontre a equação da reta que tangencia o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2$, no ponto $(x_0, f(x_0))$.*

**Solução.** Considere a reta secante ao gráfico de $f$, passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e por outro ponto $(x, f(x))$ (veja a Figura 2).

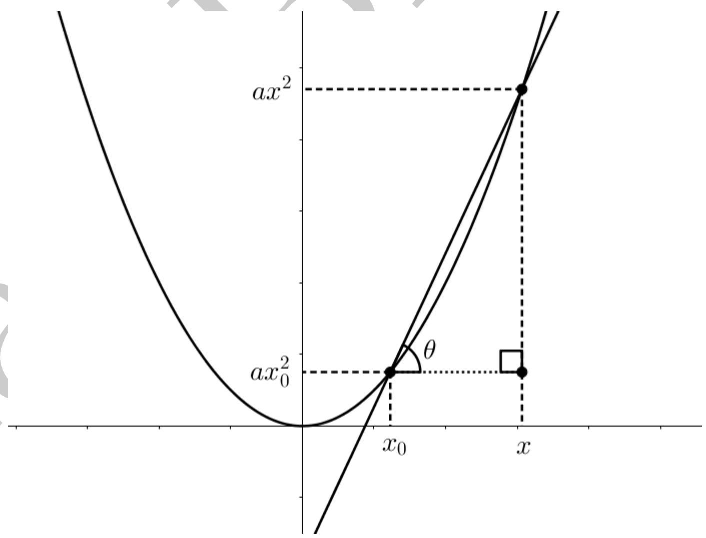


Figura 2: uma reta secante à parábola $y = ax^2$.

O coeficiente angular dessa reta secante é

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax^2 - ax_0^2}{x - x_0}. \tag{3}$$

Podemos fatorar o numerador desta fração e simplificar a expressão, obtendo

$$m_s = \frac{a(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = a(x + x_0).$$

À medida em que $x$ se aproxima de $x_0$, a soma $x + x_0$ se aproxima de $x_0 + x_0 = 2x_0$, e $m_s$ se aproxima de $a \cdot 2x_0 = 2ax_0$. Por outro lado, à medida em que $x$ se aproxima de $x_0$, a reta secante une dois pontos cada vez mais próximos, logo, cada vez mais se aproxima da posição da reta que tangencia o gráfico de $f$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Assim, concluímos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ deve ser $m_t = 2ax_0$.

Portanto, a equação (reduzida) da reta tangente ao gráfico de $f$ neste ponto é

$$y - ax_0^2 = 2ax_0(x - x_0) \tag{4}$$

□

A seguir, vamos usar o resultado obtido no Exemplo 8 para deduzir uma importante propriedade das parábolas.

**Exemplo 9.** *Nas notações da Figura 3, seja $P$ um ponto sobre uma parábola, $t$ a reta tangente a essa parábola no ponto $P$, $\overrightarrow{n}$ um vetor normal a $t$, $F$ o foco da parábola e $P'$ a projeção de $P$ sobre a diretriz da parábola, de modo que o vetor $\overrightarrow{P'P}$ seja perpendicular à diretriz. Então o ângulo entre $\overrightarrow{PF}$ e $\overrightarrow{n}$ é igual ao ângulo entre $\overrightarrow{P'P}$ e $\overrightarrow{n}$.*

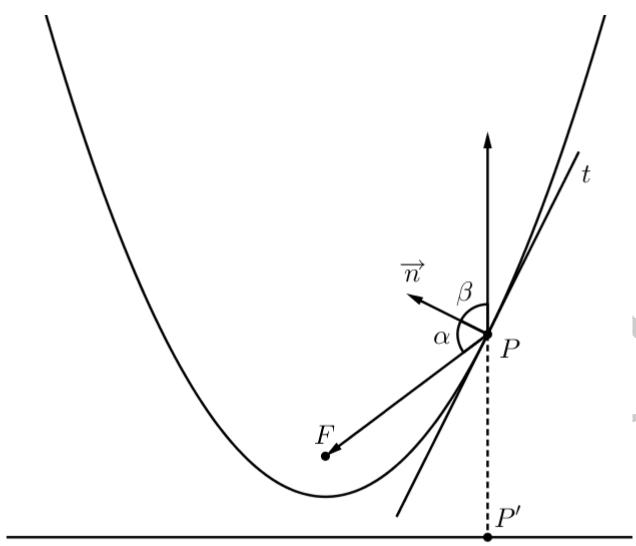


Figura 3: os ângulos $\alpha$ e $\beta$ são iguais.

**Solução.** Sabemos que $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{n} = |\overrightarrow{PF}||\overrightarrow{n}|\cos\alpha$ e $\overrightarrow{P'P} \cdot \overrightarrow{n} = |\overrightarrow{P'P}||\overrightarrow{n}|\cos\beta$. Sabemos também que $|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{P'P}|$. Portanto, se mostrarmos que os dois produtos escalares acima são iguais, teremos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{P'P} \cdot \overrightarrow{n} &\Rightarrow |\overrightarrow{PF}||\overrightarrow{n}|\cos\alpha = |\overrightarrow{P'P}||\overrightarrow{n}|\cos\beta \\ &\Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \beta.\end{aligned}$$

De acordo com a Observação 7, podemos escolher um sistema de eixos de modo que a parábola seja o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2$.

Pelo que fizemos no Exemplo 8, a equação da reta que tangencia essa parábola no ponto $(x_0, ax_0^2)$ é dada pela expressão (4), que pode ser reescrita como

$$2ax_0x - y - ax_0^2 = 0. \tag{5}$$

A Geometria Analítica ensina que um vetor normal a essa reta tangente é $\overrightarrow{n} = (2ax_0, -1)$.

Na primeira parte do Exemplo 6, vimos que, em nosso caso, o foco da parábola é o ponto $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e a diretriz é a reta $y = -\frac{1}{4a}$. Em particular, $P' = \left(x_0, -\frac{1}{4a}\right)$. De posse desses valores, podemos calcular as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{P'P}$ e $\overrightarrow{PF}$ como segue:

$$\overrightarrow{P'P} = P - P' = (x_0, ax_0^2) - \left(x_0, -\frac{1}{4a}\right) = \left(0, ax_0^2 + \frac{1}{4a}\right)$$

e

$$\overrightarrow{PF} = F - P = \left(0, \frac{1}{4a}\right) - (x_0, ax_0^2) = \left(-x_0, \frac{1}{4a} - ax_0^2\right).$$

Assim,

$$\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{n} = \left(-x_0, \frac{1}{4a} - ax_0^2\right) \cdot (2ax_0, -1) = -\frac{1}{4a} - ax_0^2$$

e

$$\overrightarrow{P'P} \cdot \overrightarrow{n} = \left(0, ax_0^2 + \frac{1}{4a}\right) \cdot (2ax_0, -1) = -\frac{1}{4a} - ax_0^2,$$

de sorte que, realmente, $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{P'P} \cdot \overrightarrow{n}$. □

**Observação 10.** *Em Óptica, dizemos que um espelho é* parabólico *se seu formato for o de uma parábola girada em torno de seu eixo de simetria. A propriedade das parábolas que exibimos no Exemplo 9 tem a seguinte aplicação a espelhos parabólicos: se uma fonte de luz for colocada no foco da parábola que gerou o espelho, então os raios que emanam dessa fonte, depois de refletidos, tornam-se paralelos. Por essa razão, espelhos parabólicos são usados como holofotes e farois.*

*Por outro lado, se ondas eletromagnéticas paralelas atingirem um anteparo parabólico, então elas serão todas refletidas para o foco da parábola. Essa propriedade é usada na construção das antenas parabólicas e de fornos rudimentares.*

## Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

A resolução de exercícios é fundamental para a fixação do conteúdo e a abordagem de pontos específicos do assunto. Tentamos selecionar, aqui, alguns exercícios que pudessem responder perguntas que, a princípio, podem parecer triviais, mas não o são. Um exemplo é "porque o gráfico de uma função afim é uma reta?"

Perceba que, no item (c) do Exemplo 1, apesar de falarmos sobre o gráfico de uma função afim, não fizemos desenhos. Você pode fazer os desenhos quando estiver em sua aula, isso não é proibido, e é até aconselhável. Porém, tratar um problema geométrico (no caso, a colinearidade) sem desenhar nos leva a um entendimento da contrapartida algébrica do fato geométrico, o que torna a demonstração mais rigorosa e permite generalizações a contextos onde figuras não são mais de muita utilidade.

Uma discussão sobre a função afim, ligeiramente diferente da que fizemos aqui, apareceu na aula *Funções e Imagem*, no módulo de Funções, Parte 1.

No Exemplo 6, procuramos deixar claro porque o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Você pode aproveitar o ensejo para comentar com seus alunos que existem curvas que até se parecem com uma parábola, mas que têm propriedades geométricas muito diferentes: por exemplo, você pode perguntar a eles se as curvas formadas por fios ou correntes, penduradas pelas pontas, são parábolas. A resposta é **não**, elas não são parábolas. Essas curvas são chamadas **catenárias** (do latim *catena*, cadeia, corrente).

O Exemplo 9 mostra uma propriedade notável das parábolas. Você pode explorar a Observação 10 um pouco mais, exibindo exemplos de antenas parabólicas e de farois.

Outro exemplo importante, que não citamos aqui mas que você pode explorar, é o formato parabólico que as trajetórias de projéteis lançados obliquamente têm, desprezadas a resistência do ar e a variação da aceleração da gravidade com a altura, bem como o alcance do projétil em relação ao raio da Terra. Esse formato se deve ao fato de que, pelo *Princípio da Independência de Galileu*, o movimento de um projétil é pode ser descrito como a composição de um movimento horizontal uniforme (velocidade constante) e um movimento vertical uniformemente variado (aceleração constante). Esse último tipo de movimento é regido por uma função quadrática. Para mais detalhes, veja a sugestão de leitura complementar [3].

Mais exemplos e resultados relativos ao material aqui reunido podem ser vistos nas sugestões de leitura complementar [1] e [2].

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.

2. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.

3. H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica, vol. 1: Mecânica.* Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2013.