Material Teórico - Módulo de Divisibilidade

Múltiplos e Divisores

Sexto Ano

Prof. Angelo Papa Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Múltiplos e divisores

Os números $0, 1, 2, 3$, etc. serão chamados aqui de números naturais. O conjunto dos números naturais será denotado por $\mathbb{N}$ e escreveremos $n \in \mathbb{N}$ para indicar que o número n é um número natural.

Vamos começar observando algumas divisões.

Exemplo 1.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 5 \\ \cline{2-2} -10 & 2 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \cline{2-2} -12 & 4 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 4 \\ \cline{2-2} -12 & 3 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ \cline{2-2} -18 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Valem as seguintes relações para esses números: $14 = 5 \cdot 2 + 4$, $12 = 3 \cdot 4 + 0$, $15 = 4 \cdot 3 + 3$ *e* $18 = 6 \cdot 3 + 0$.

Em geral, em uma divisão, onde $b \neq 0$,

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

a, b, q e r são chamados **dividendo**, **divisor**, **quociente** e **resto**, respectivamente, e vale a seguinte relação

$$a = b \cdot q + r, \quad \text{onde } 0 \leq r < b. \tag{1}$$

Exemplo 2. *Nas divisões do exemplo 1, os números* $14, 12, 15$ *e* 18 *são os dividendos, os números* $5, 3, 4$ *e* 6 *são os divisores, os números* $2, 4, 3$ *e* 3 *são os quocientes e os números* $4, 0, 3$ *e* 0 *são os restos das divisões.*

Em duas das divisões do exemplo 1, o resto é igual a zero. Quando isso acontece, dizemos que a divisão é **exata**. Isso quer dizer, por exemplo, que a divisão de 12 por 3 e a divisão de 18 por 6 são exatas, porque os restos nessas divisões são iguais a zero, enquanto as outras duas divisões do exemplo 1 não são exatas, porque têm restos diferentes de zero.

> Quando uma divisão é exata, o resto r é igual a zero e a igualdade (1) pode ser escrita assim:
>
> $$a = b \cdot q. \tag{2}$$
>
> Neste caso, dizemos que a é **múltiplo** de b, ou que a é **divisível** por b, ou ainda que b **divide** a.

Exemplo 3. *Voltando ao exemplo 1, dizemos que* 12 *é múltiplo de* 3 *e* 18 *é múltiplo de* 6*, pois* $12 = 3 \cdot 4$ *e* $18 = 6 \cdot 3$*. Podemos também dizer que* 12 *é divisível por* 3 *e que* 18 *é divisível por* 6*, ou ainda que* 3 *divide* 12 *e que* 6 *divide* 18*.*

Observação 4. *Veja que* $a = a \cdot 1$ *para todo* $a \in \mathbb{N}$*. Dessa forma, podemos dizer que* 1 *é divisor de qualquer número natural. Podemos ainda concluir, observando essa mesma igualdade, que todo número natural é divisor de si mesmo. Da mesma forma, a igualdade* $0 = a \cdot 0$ *nos diz que o número* 0 *é múltiplo de qualquer número natural.*

2 Números primos

O número 1 possui apenas um divisor: ele mesmo. Para verificarmos isso, escrevemos $1 = b \cdot q$, com $b, q \in \mathbb{N}$. Então b não pode ser maior do que 1, ou seja, b só pode ser igual a 0 ou igual a 1. Se b fosse igual a 0, então $1 = b \cdot q = 0 \cdot q = 0$, o que não é possível. Logo, b só pode ser igual a 1.

Quanto ao número zero, ele tem, pela observação 4, uma quantidade infinita de divisores. Exceto o número zero, qualquer outro número natural tem uma quantidade finita de divisores.

Além disso, qualquer número natural n diferente de 0 ou 1 tem pelo menos dois divisores: o número 1 e o próprio n. Um caso de especial importância é quando um número natural diferente de 1 tem a menor quantidade possível de divisores.

> Quando um número natural tem *exatamente dois* divisores, ele é chamado **número primo**. Se um número natural diferente de 0 e de 1 não é primo, dizemos que ele é **composto**.

Números compostos são exatamente aqueles que podem ser escritos como produto de dois outros números naturais menores. Por exemplo, $12 = 2 \cdot 6$ e $21 = 3 \cdot 7$ são compostos, mas 23 é primo, pois a única forma de escrevê-lo como produto de dois números naturais é $23 = 23 \cdot 1$ e um dos fatores, 23, não é menor do que 23.

Há um modo geométrico de identificar números primos ou compostos que é bastante antigo, com origem incerta, mas que era usado já antiga Grécia por Pitágoras de Samos, que viveu no século VI a.C., e por seus seguidores, conhecidos como pitagóricos.

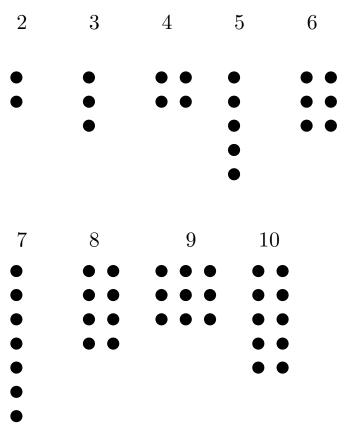

Figura 1: Números figurados.

O método é muito simples e consiste em considerar, para cada número natural n maior do que 1, n pontos (ou bolinhas, ou pedrinhas, ou feijões, etc.). O número n é composto se for possível arrumar os n pontos em um arranjo de formato retangular, com a colunas, cada uma com b pontos, $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Desse modo, $n = a \cdot b$.

Caso a única maneira de arrumar os n pontos de modo retangular seja numa fila (um retângulo de uma coluna só, $a = 1$, ou uma linha só, $b = 1$), então o número n é primo.

Exemplo 5. *Na figura 1 podemos ver representações dos números naturais de* 2 *a* 10*. Os números* $4, 6, 8$ *e* 10 *são compostos pois podem ser arrumados em retângulos com duas colunas iguais.*

Isso ocorre porque esses números são múltiplos de 2 e maiores do que 2. Os múltiplos de 2 são chamados números **pares**. O número 2 paga um preço por ser pequeno demais: não é possível formar duas colunas ou duas linhas apenas com dois pontos. Por isso, 2 é o único número primo par. O número 0 é par, pois $0 = 2 \cdot 0$, ou seja, 0 é um múltiplo de 2.

Números naturais que não são divisíveis por 2 são chamados **ímpares**. Pares e ímpares se alternam na sequência dos naturais: um natural é par ou ímpar, e se n é ímpar então $n + 1$ é par, se n é par então $n + 1$ é ímpar. A partir desse fato, podemos concluir que há uma infinidade de números pares e, como todos os pares, exceto 2, são compostos, há uma infinidade de números compostos.

Observação 6. *Há também uma infinidade números primos, mas uma justificativa para isso não é tão simples. O primeiro registro de uma prova de que há uma quantidade arbitrariamente grande de primos está na proposição* 20 *do livro IX dos* Elementos*, conjunto de treze livros escritos por Euclides de Alexandria há mais de* 23 *séculos.*

Exemplo 7. *Voltando à figura 1, vemos que os números* $2, 3, 5$ *e* 7 *são primos, pois o único modo de formar um retângulo com algum desses números é formar uma fila (um retângulo com uma só coluna). Os números* 4 *e* 9 *formam retângulos especiais:* 4 *ou* 9 *pontos podem ser arranjados em formato de quadrado. Por isso, chamamos os números* 4 *e* 9 *de quadrados. Escrevemos* $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ *e* $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ *e lemos "*4 *é igual a* 2 *ao quadrado", "*9 *é igual a* 3 *ao quadrado".*

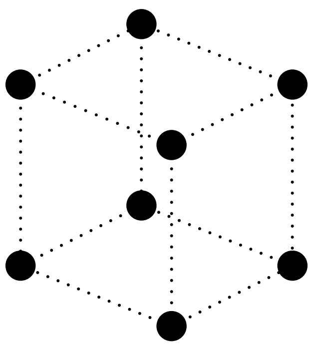

Figura 2: 8 é um cubo.

O número 8, que representamos na figura 1 como $8 = 2 \cdot 4$, ou seja, um retângulo com duas colunas de 4 elementos cada, pode também ser representado tridimensionalmente: oito pontos podem ser colocados nos vértices de um cubo. Como 4 é um quadrado, podemos ver $8 = 2 \cdot 4$ como dois quadrados, um em cima do outro (veja a figura 2). Por isso, chamamos o número 8, e outros números como 27 e 64, de *cubos*. Escrevemos $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$, $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ e lemos "8 é igual a 2 ao cubo", "27 é igual a 3 ao cubo", "64 é igual a 4 ao cubo". Essa é uma herança dos tempos de Pitágoras.

Observação 8. *Os pitagóricos também estudaram outros números figurados como os números triangulares:* $1, 3, 6, 10$*, etc., e obtiveram relações interessantes entre esses números. Por exemplo,* a soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado*. Convido o leitor a fazer algumas experiências com pontos (ou bolinhas, ou pedrinhas, ou feijões) para descobrir qual é o número triangular que vem depois de* 10 *e por que é verdade a afirmação destacada na frase anterior.*

3 Números primos entre si

Na observação 4, afirmamos que 0 é múltiplo de qualquer número natural, ou seja, 0 tem uma infinidade de divisores. Como já observamos no início da seção 2, qualquer outro número natural tem uma quantidade finita de divisores naturais.

Exemplos 9.

(a) *Os divisores de* 16 *são* $1, 2, 4, 8$ *e* 16*.*

(b) *Os divisores de* 48 *são* $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24$ *e* 48*.*

(c) *Os divisores de* 15 *são* $1, 3, 5$ *e* 15*.*

(d) *Os divisores de* 17 *são* 1 *e* 17*.*

Dados dois ou mais números naturais, que *não* sejam todos iguais a zero, um **divisor comum** desses números é um número natural que divide todos esses números ao mesmo tempo.

Exemplos 10.

(a) *Os divisores comuns de* 15 *e* 48 *são* 1 *e* 3*.*

(b) *Os divisores comuns de* 16 *e* 48 *são* $1, 2, 4, 8$ *e* 16*.*

(c) *O único divisor comum de* 15 *e* 16 *é* 1*.*

(d) *O único divisor comum de* 17 *e* 48 *é* 1*.*

O número 1 divide qualquer número natural, logo é divisor comum de quaisquer números naturais dados. Um caso especialmente importante é aquele em que 1 é o único divisor comum.

Quando 1 é o único divisor comum de dois ou mais números naturais, não todos nulos, dizemos que estes números **são primos entre si**, ou **relativamente primos**.

Exemplos 11.

(a) *Os números* 3 *e* 8 *são primos entre si, pois os divisores de* 3 *são* 1 *e* 3 *enquanto os divisores de* 8 *são* $1, 2, 4$ *e* 8*. Logo, o único divisor comum de* 3 *e* 8 *é* 1*.*

(b) *Os divisores de* 9 *são* $1, 3$ *e* 9 *e os divisores de* 12 *são* $1, 2, 3, 4, 6$ *e* 12*. Logo, os divisores comuns de* 9 *e* 12 *são* 1 *e* 3*. Como* 1 *não é o único divisor comum de* 9 *e* 12*, estes números não são primos entre si.*

(c) *Os números* 8 *e* 12 *têm como divisores comuns os números* $1, 2$ *e* 4*, logo não são primos entre si.*

(d) *O único divisor comum de* $8, 9$ *e* 12 *é* 1*, logo* $8, 9$ *e* 12 *são primos entre si.*

(e) *De acordo com o exemplo 10 (a),* 15 *e* 48 *não são primos entre si, pois* 3 *é divisor comum desses números.*

(f) *De acordo com o exemplo 10 (c),* 15 *e* 16 *são primos entre si.*

Dicas para o Professor

As seções acima podem ser vistas em duas aulas de 50 minutos cada. Se você dispuser de três aulas de 50 minutos cada poderá aproveitar o tempo para fazer algumas experiências com seus alunos, usando materiais simples como bolinhas de gude ou feijões para construir configurações análogas às que aparecem na figura 1. Nas sugestões de leitura complementar [2] e [3] você poderá encontrar mais informações sobre números figurados (números triangulares, quadrados, pentagonais, etc.).

Nas referências [1] e [2], você encontrará mais informações sobre os assuntos abordados nessa aula.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números.* São Paulo, Nobel, 1989.

3. J.H. Conway, R.K. Guy. *O Livro dos Números.* Lisboa, Gradiva, 1999.

3. A. Doxiadis. *Tio Petrus e a Conjectura de Goldbach.* São Paulo, Editora34, 2001.