Material Teórico - Módulo Divisibilidade

Quantidade de divisores

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de abril de 2023

Portal da Matemática
OBMEP

1 O conjunto dos divisores

Na primeira parte desta aula, vamos estudar uma propriedade interessante do conjunto dos divisores de um número.

Vamos começar com alguns exemplos. Queremos encontrar o conjunto dos divisores do número 12. Esse conjunto pode ser obtido por exaustão, tentando dividir 12 por cada inteiro de 1 até 12 e selecionado aqueles cujo resultado da divisão seja um número inteiro (adiante, veremos uma maneira mais eficiente de fazer isso):

$12 \div \boxed{1} = 12.$

$12 \div \boxed{2} = 6.$

$12 \div \boxed{3} = 4.$

$12 \div \boxed{4} = 3.$

$12 \div \boxed{5} = \text{não inteiro}.$

$12 \div \boxed{6} = 2.$

$12 \div \boxed{7} = \text{não inteiro}.$

$12 \div \boxed{8} = \text{não inteiro}.$

$12 \div \boxed{9} = \text{não inteiro}.$

$12 \div \boxed{10} = \text{não inteiro}.$

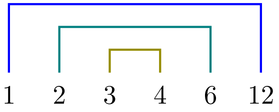
$12 \div \boxed{11} = \text{não inteiro}.$

$12 \div \boxed{12} = 1.$

Assim, o conjunto dos divisores de 12 é $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

A primeira coisa que salta aos olhos, ao observarmos as divisões acima, é a lista de resultados das divisões: 12, 6, 4, 3, 2 e 1. Observe que essa lista de resultados coincide com a lista dos divisores, vista de trás para frente. Isso ocorre porque, se a é um divisor positivo de um número natural n, então $n \div a = b$, onde b é um natural. Logo, $a \cdot b = n$, o que é o mesmo que $n \div b = a$. Como a é natural, segue que b também é um divisor de n. Além disso, quanto menor for o número a, maior será o número b (uma vez que o produto dos dois sempre vale n).

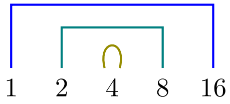
O argumento acima mostra, aparentemente, que os divisores de um número vêm em pares. Veja:



Os pares realçados possuem produto constante igual a 12.

$$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12.$$

É preciso, contudo, ter certo **cuidado**, pois existe a possibilidade de que a quantidade total de divisores de um número seja ímpar. Por exemplo, os divisores de 16 são $\{1, 2, 4, 8, 16\}$; nesse caso, o divisor que está no centro da lista faz par com ele próprio.



Assim, $1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = 16$.

Lembre-se de que um natural n é chamado de **quadrado perfeito** quando a raiz quadrada de n também for um número natural, ou seja, quando existir um inteiro k tal que $n = k^2$. Um consequência da discussão acima é:

> Um número tem uma quantidade ímpar de divisores se, e só se, ele é um quadrado perfeito. Se $n = k^2$, o número k está exatamente no centro da lista dos divisores de n, quando escrevemos tais divisores em ordem crescente.

A informação de que os divisores de um número formam pares torna mais fácil procurá-los. Vejamos um

Exemplo 1. *Encontre todos os divisores do número* $n = 40$.

Solução. Para fazer isso, vamos organizar os pares de divisores de n em 2 colunas. O número 1 e o número n, sempre são divisores de n, e formam o primeiro par da nossa lista. No caso se $n = 40$, começamos pondo:

1	40

Agora, tentando dividir 40 por 2, o resultado é um inteiro: $40 \div 2 = 20$. Esse inteiro, 20, também é um divisor de 40, logo, continuamos com nossa lista, escrevendo:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 40 \\ 2 & 20 \\ & \end{array}$$

Tentamos dividir 40 por 3, sem sucesso: $40 \div 3 =$ não inteiro. Logo, 3 não é um divisor de 40. Tentamos dividir por 4 e encontramos nosso próximo par de divisores.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 40 \\ 2 & 20 \\ 4 & 10 \end{array}$$

Dividindo por 5, achamos mais um par:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 40 \\ 2 & 20 \\ 4 & 10 \\ 5 & 8 \end{array}$$

Ao tentar dividir por 6 o resultado de $40 \div 6$ não é inteiro. Por outro lado, ao tentar dividir por 7, o resultado, além de não ser inteiro, é menor do que 7. Com isso, já podemos parar nossa busca. Isso porque qualquer divisor de 40 que seja maior do que 7 fará par com um divisor menor do que 7; entretanto, todos os divisores menores do que 7 (e seus pares) já foram listados.

Logo, o conjuntos dos divisores de 40 é:

$$\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.\}$$

$\square$

A discussão do exemplo anterior deixa claro a validade do seguinte resultado geral.

Se n é um natural e já encontramos todos os divisores de n que são menores ou igual a $\sqrt{n}$, então os "pares" desses divisores fornecem todos os divisores de n que são maiores ou iguais a $\sqrt{n}$.

Essa observação é essencialmente uma generalização da que fizemos na aula passada: para determinar se um número maior do que 1 é primo, basta verificar se ele possui algum divisor diferente de 1 e que seja menor ou igual que sua raiz quadrada.

O próximo exemplo traz um número quadrado perfeito, o qual tem uma quantidade ímpar de divisores e tal que nossa busca por divisores terminará exatamente em sua raiz quadrada.

Exemplo 2. *Encontre todos os divisores de* 225*.*

Solução. Vamos organizar os divisores em 2 colunas, começando com a dupla $\{1, 225\}$.

1	225

Agora, 225 é ímpar, logo, não será divisível por 2. Ao tentarmos dividi-lo por 3, encontramos a próxima dupla: $225 \div 3 = 75$; então, listamos 3 e 75 como divisores. Dividindo por 4, vemos que a divisão não é inteira. Dividindo por 5, obtemos $225 \div 5 = 45$. Até agora, temos:

1	225
3	75
5	45

Uma vez que a divisão por qualquer número par dá um resultado não inteiro, continuamos testando os ímpares. Para $7, 9, 11, 13$ o resultado das divisões também não será inteiro. Finalmente, ao tentar o 15, obtemos $225 \div 15 = 15$, de sorte que podemos encerrar nossa busca por divisores com a tabela:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 225 \\ 3 & 75 \\ 5 & 45 \\ 15 & 15. \end{array}$$

Assim, o conjunto dos divisores de 225 é:

$$\{1, 3, 5, 15, 45, 75, 225\}.$$

Veja que não devemos listar o número 15 duas vezes; ele simplesmente faz dupla consigo mesmo, mas, como divisor, deve ser contado uma única vez. □

2 Quantidade de divisores

Nesta seção, passamos a considerar o problema do cálculo da quantidade de divisores de um número.

É claro que uma maneira de realizar esse cálculo seria simplesmente listar todos os divisores do número, como vínhamos fazendo na seção anterior, e contar quantos divisores foram encontrados.

Exemplo 3. *Quantos divisores possuem os números* 12*,* 40 *e* 225*.*

Solução. Na seção anterior, já listamos todos os divisores desses números. Basta, então, contar quantos números há em cada conjunto. Volte lá e conte:

- O número 12 possui 6 divisores.
- O número 40 possui 8 divisores.
- O número 225 possui 7 divisores.

□

Agora estudaremos uma maneira mais prática[1] de fazer isso, ou seja, uma maneira que permite obter diretamente a

[1] Ver comentários para o professor, ao final desta aula.

quantidade de divisores sem a necessidade de listá-los individualmente. Para isso, precisamos apenas obter uma fatoração do número em primos.

Fatorar um número inteiro maior do que 1 em primos significa escrever esse número como um produto de potências de números primos.

Por exemplo, o número 1500 pode ser escrito como:

$$1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3,$$

onde 2, 3 e 5 são números primos. Assim, 2^2, 3^1 e 5^3 são potências de números primos e $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$ é a fatoração de 1500 em primos.

Observação 4. *Se um número for primo, sua fatoração em primos é trivial, pois o número é igual a ele mesmo. Por exemplo, a fatoração de* 13 *em primos é simplesmente* 13*.*

Observação 5. *Lembre-se de que o número* 1 *não é primo. Logo, ele não aparece na fatoração de outros números maiores que* 1*.*

O **Teorema Fundamental da Aritmética** diz que, a menos da ordem dos fatores, só existe uma maneira de escrever um número maior que 1 como um produto de potências de primos, em que cada primo aparecer em um única potência.

A demonstração da validade desse teorema não cabe em um curso de Ensino Fundamental. O que faremos aqui é aceitar que o teorema é verdadeiro e examinar as consequências desse fato.

Exemplo 6. *Na aula passada, calculamos todos os números primos menores ou igual a* 60*. Vimos que os números* 43 *e* 53 *são primos. Pode-se verificar rapidamente que* 61 *e* 73 *também são primos. Com isso, podemos garantir com toda certeza (sem a necessidade de fazer conta alguma) que:*

$$43 \cdot 73 \neq 53 \cdot 61.$$

Realmente, se os resultados desses produtos fossem iguais, teríamos um número escrito de duas maneiras diferentes como um produto de primos, contrariando o teorema fundamental da aritmética.

Fazendo os cálculos, vemos que os resultados são próximos, mas são mesmo diferentes:

$$43 \cdot 73 = 3\,139 \qquad e \qquad 53 \cdot 61 = 3\,233.$$

Pelo menos motivo,

$$3 \cdot 5 \cdot 11 \neq 13^2,$$

já que os números $3, 5, 11$ *e* 13 *são primos.*

Por outro lado, quando os números envolvidos não são primos, existe a possibilidade de obter produtos iguais partindo de fatores diferentes:

$$11 \cdot 15 = 5 \cdot 33 = 165.$$

Para calcular a fatoração em primos de um número, basta fazer divisões sucessivas por números primos (ou mesmo por potências de primos, se quisermos acelerar o processo). Se o número for primo, sua fatoração será ele próprio. Caso contrário, ele será divisível por algum primo menor que ele. Após encontrar tal primo que o divida, olhamos para o quociente da divisão e repetimos o processo, tentando fatorar o quociente (ou seja, tentando dividir o quociente por primos).

Também organizamos esse processo usando uma tabela com duas colunas, mas bastante diferente da tabela da seção anterior. Na coluna da esquerda, colocamos o número inicial e os quocientes da divisão. Na coluna da direita, listamos os fatores primos.

Exemplo 7. *Fatore o número* 600 *em primos.*

Solução. Claramente, 600 é divisível por 2, com quociente igual a 300. Assim, começamos nossa tabela escrevendo:

$$\begin{array}{r|l} 600 & 2 \\ 300 & \end{array}$$

Agora, buscamos uma fatoração para o número 300. Dividindo por 2, obtemos 150; dividindo por 2 mais uma vez, obtemos 75. Temos, até agora:

$$\begin{array}{c|l} 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & \end{array}$$

Como 75 é impar, já esgotamos todos os fatores 2. Daqui em diante, tentaremos apenas primos maiores do que 2. Dividindo por 3, obtemos $75 \div 3 = 25$. Assim:

$$\begin{array}{c|l} 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & \end{array}$$

O número 25 não é múltiplo de 3. O próximo divisor primo que encontramos é 5: temos $25 \div 5 = 5$. Dividindo novamente por 5, obtemos o quociente 1 e terminamos.

$$\begin{array}{c|l} 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim,

$$600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Como o número primo 2 aparece três vezes, o número 3 uma vez e o número 5 duas vezes, podemos simplificar a expressão para:

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2,$$

que é a fatoração do número 600. □

Ao realizar as divisões, podemos acelerar o processo dividindo por números grandes, inclusive por números que não sejam primos. Porém, nesse caso, precisamos escrever do lado direito a forma fatorada desses números grandes.

Exemplo 8. *Fatore o número* $44\,000$ *em primos.*

Solução. É clado que 1000 é um divisor de $44\,000$, pois $44\,000 = 44 \cdot 1000$. Como 1000 não é primo, primeiro encontraremos uma fatoração de 1000. Veja que,

$$1000 = 10^3 = (2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3.$$

Assim, começamos a fatorar o número $44\,000$ fazendo:

$$\begin{array}{c|c} 44000 & 2^3 \cdot 5^3 \\ 44 & \end{array}$$

Agora, basta fatorar 44. Dividindo por 2, obtemos 22; dividindo por 2 novamente, obtemos 11. Por fim, dividindo por 11, obtemos 1.

Organizando a tabela, ficamos com:

$$\begin{array}{c|c} 44000 & 2^3 \cdot 5^3 \\ 44 & 2 \\ 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} 44000 &= (2^3 \cdot 5^3) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \\ &= 2^5 \cdot 5^3 \cdot 11. \end{aligned}$$

$\square$

Um vez que conheçamos a fatoração de um número, é possível descrever todos os seus divisores sem a necessidade de listá-los. O próximo teorema nos diz como fazê-lo.

Teorema 9. *Se d e n são maiores do que 1 e d é um divisor de n, então na fatoração de d aparecem apenas primos que aparecem na fatoração de n (não necessariamente todos eles). Além disso, os expoentes desses primos são menores ou iguais aos respectivos expoentes em n.*

A seguir, incluímos uma demonstração desse teorema. A leitura é opcional!

Prova. Se $d > 1$ é um divisor de n, então $n = d \cdot q$, onde q é um inteiro (o quociente da divisão de n por d).

Fatorando d e q, obteremos uma maneira de escrever cada um deles como um produto de potências de primos. O produto dessas fatorações dará uma maneira de escrever n como um produto de potências primos, e o Teorema Fundamental da Aritmética garante que, nesse produto, só podem aparecer os primos que estão na fatoração (original) de n.

Por fim, o expoente de um primo p na fatoração de n é igual à soma dos expoentes de p na fatoração de d e de q. Logo, o expoente de p na fatoração de d é menor ou igual ao expoente de p na fatoração de n. □

Exemplo 10. *Seja $n = 2^7 \cdot 5^3 \cdot 11^5$. Qual dos seguintes números é um divisor de n?*

(*i*) $a = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^3$.

(*ii*) $b = 2 \cdot 11$.

(*iii*) $c = 2^2 \cdot 7$.

(*iv*) $d = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 11^3$

(*v*) $e = 22 \cdot 10$.

Solução. Os números 2, 5 e 11 são primos. Logo, o enunciado já forneceu a fatoração de n. Os expoentes de 2, 5 e 11 na fatoração são, respectivamente, 7, 3 e 5.

(i) Observando os expoente de 2, 5 e 11, temos:

$$\begin{array}{rcl} n & = & 2^7 \cdot 5^3 \cdot 11^5 \\ & & \ \vee\!| \quad \vee\!| \quad \vee\!| \\ a & = & 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \end{array}$$

Ou seja, $3 \leq 7$, $2 \leq 3$ e $3 \leq 5$. Logo, $2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^3$ **é divisor** de n.

(ii) Como $2 = 2^1$ e $11 = 11^1$ e os números 2 e 11 aparecem na fatoração de n (obviamente, com expoentes maiores ou iguais a 1), temos que $2 \cdot 11$ **é divisor** de n. Não há problema em o número 5 (que aparece na fatoração de n) não aparecer na fatoração de b.

(iii) O número 7 é um primo que aparece como fator de c mas não aparece na fatoração de n, logo c **não é um divisor** de n.

(iv) Os primos 2, 5 e 11, da fatoração de d, aparecem na fatoração de n. Contudo, o expoente de 2 na fatoração de d é maior do que o expoente de 2 em n $(8 > 7)$. Logo d **não é divisor** de n.

(v) Cuidado! Como os números 22 e 10 não são primos, para responder a pergunta temos de começar escrevendo suas fatorações em primos: $22 = 2 \cdot 11$ e $10 = 2 \cdot 5$. Logo,

$$e = (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 5 \cdot 11.$$

de sorte que $2^2 \cdot 5 \cdot 11$ **é divisor** de n:

$$\begin{array}{rcl} n & = & 2^7 \cdot 5^3 \cdot 11^5 \\ & & \ \vee\!| \quad \vee\!| \quad \vee\!| \\ e & = & 2^2 \cdot 5^1 \cdot 11^1 \end{array}$$

□

O teorema a seguir nos diz como **calcular a quantidade de divisores a partir da fatoração de um número**.

Teorema 11. *A quantidade de divisores de um número $n > 1$ é calculada somando 1 a cada expoente dos primos que aparecem na fatoração de n e multiplicando os resultados.*

Exemplo 12. *Qual a quantidade de divisores de cada número abaixo?*

(a) 100.

(b) 252.

(c) 45000.

Solução.

(a) Claramente, temos $100 = 10^2 = 2^2 \cdot 5^2$. Como 2 e 5 são primos, obtivemos a fatoração de 100. Observamos os expoentes da fatoração: 2 e 2. Somamos 1 a cada um deles e multiplicamos:

$$(2 + 1) \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 3 = 9.$$

Logo, 100 possui 9 divisores.

(b) Vamos começar fatorando o número 252. Veja:

$$\begin{array}{c|c} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Logo,

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Observamos os expoentes da fatoração: 2, 2 e 1. Somamos 1 a cada um deles e multiplicamos:

$$(2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$

Logo, 252 possui 18 divisores.

(c) Como sempre, vamos fatorar o número 45 000. Como,

$$45\,000 = 45 \cdot 1000,$$

vamos fatorar 45 e 1000 separadamente. Temos que $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$. E $45 = 9 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$. Logo,

$$45\,000 = (2^3 \cdot 5^3) \cdot (3^2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4.$$

Logo, a quantidade de divisores de 45 000 é:

$$(3+1) \cdot (2+1) \cdot (4+1) = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

□

Exemplo 13. *Calcule a quantidade de divisores do número $3^6 - 1$.*

Solução. Usando que para todo número x podemos escrever $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ e fazendo $x = 3^3$, obtemos:

$$3^6 - 1 = (3^3 + 1)(3^3 - 1) = 28 \cdot 26.$$

Fatorando 28 e 26, temos:

$$28 = 2^2 \cdot 7 \quad \text{e} \quad 26 = 2 \cdot 13.$$

Portanto,

$$3^6 - 1 = (2^2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 13) = 2^3 \cdot 7 \cdot 13,$$

de modo que a quantidade de divisores de $3^6 - 1$ é

$$(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

□

Exemplo 14. *Encontre todos os números naturais n tais que $n \leq 50$ e o produto dos divisores de n é igual a n^2.*

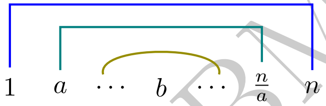
Solução. Veja que $n = 1$ é uma das soluções. Vamos procurar as soluções maiores do que 1.

Veja que n não pode ser primo. Se fosse, seus únicos divisores seriam 1 e n, de forma que o produto dos divisores seria $1 \cdot n \neq n^2$ (para $n > 1$).

Também não é possível que n tenha exatamente três divisores. Nesse caso, o conjunto de divisores de n seria $\{1, k, n\}$, e o produto dos divisores seria:

$$1 \cdot k \cdot n < n^2.$$

Também não é possível que n tenha cinco ou mais divisores. Fosse esse o caso, teríamos duas duplas de divisores, $\{1, n\}$, $\{a, n/a\}$ e pelo menos um outro divisor b; algo da forma:



Nesse caso, o produto dos divisores já seria maior do que n^2:

$$(1 \cdot n) \cdot \left(a \cdot \frac{n}{a}\right) \cdot b = n^2 \cdot b > n^2.$$

A única possibilidade restante é que n tenha exatamente quatro divisores. Para isso, o conjunto dos divisores de n precisa ser da forma $\{1, p, q, n\}$ com $p < q$ e $p \cdot q = n$. Todo divisor de p e q também é divisor de n (mais detalhes sobre isso, na próxima aula). Assim, p precisa ser primo (caso contrário n teria um quinto divisor). Pelo menos motivo, o conjunto dos divisores de q deve estar contido em $\{1, p, q\}$. Logo, há duas possibilidades: ou q é um primo diferente de p ou $q = p^2$.

Da mesma forma, há 2 possibilidades para n:

i. $n = p \cdot q$ é um produto de dois primos *distintos*;

ii. $n = p \cdot p^2 = p^3$, onde p é um primo.

No primeiro caso, veja que $p^2 < pq = n \leq 50$. Logo, $p \leq 7$, de sorte que, $p \in 2,3,5,7$. Observe a lista de todos os primos menores que 25:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.$$

Verificamos, para cada valor de p os possíveis valores de q tais que $pq \leq 50$. Temos, então, os possíveis valores de n: $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, $2 \cdot 11$, $2 \cdot 13$, $2 \cdot 17$, $2 \cdot 19$, $2 \cdot 23$, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $3 \cdot 11$, $3 \cdot 13$, $5 \cdot 7$. Há 13 possibilidades para n (nesse caso).

No segundo caso, $n = p^3 \leq 50$, logo, $p < 4$. Então, é imediato que $n = 2^3$ ou $n = 3^3$.

Resumindo, os possíveis valores de n que satisfazem o enunciado são:

$$1, 8, 6, 10, 14, 22, 26, 27, 34, 38, 46, 15, 21, 33, 39, 35.$$

(Para facilitar, destacamos com cores diferentes os valores proveniente de casos diferentes da nossa análise). □

Exemplo 15 (Desafio). *Encontre todos os números naturais n tais que $n \leq 100$ e o produto dos divisores de n é igual a n^3.*

Dica. Comece mostrando que n precisa ter exatamente 6 divisores. Logo, n precisa ser da forma p^5 ou $p \cdot q^2$ em que p e q são primos. Encontre todos os primos p tais que $p^5 \leq 100$ e todos os pares de primos (p,q) tais que $p \cdot q^2 \leq 100$. □

Dicas para o Professor

Usamos a fatoração em primos de um número para contar a quantidade de divisores dele. Na aula passada, comentamos que, para números muitos grandes, o problema de obter sua fatoração em primos é bastante difícil, computacionalmente. De toda forma, vale ressaltar que fatorar um número sempre será mais fácil do que simplesmente listar cada um dos divisores desse número, já que a lista de todos os divisores inclui também todos os primos e potências de primos que o dividem.

Recomendamos que esta aula seja feita em dois encontros de 50 minutos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo, Nobel, 1989.

3. J.H. Conway, R.K. Guy. *O Livro dos Números*. Lisboa, Gradiva, 1999.