Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Definição de Derivada

Definição e Exemplos

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Maio de 2023

Portal da Matemática
OBMEP

Os problemas da *reta tangente* ao gráfico de uma função e da *velocidade (instantânea)* de uma partícula, já estudados anteriormente [1], levam-nos a um importante tipo de limite, tema dos nossos próximos módulos: a *derivada*.

Depois de definir a derivada de uma função em um ponto do seu domínio (seção 1), revisitaremos aqueles problemas (seção 2) e discutiremos alguns exemplos (seção 3).

1 Definição de derivada

Em nossa discussão, consideraremos funções $f : I \to \mathbb{R}$ cujo domínio I é uma reunião de intervalos (não degenerados) [2]. Com essa hipótese, fixado qualquer $a \in I$, há sentido em fazer a variável $x \in I$ tender ao ponto a.

Definição 1. *Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é* ***derivável no ponto $a \in I$*** *se o limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existir. Nesse caso, denotamos tal limite por $f'(a)$ e o chamamos de ***derivada da função f no ponto a****.*

Se ocorrer de f ser derivável em cada ponto de seu domínio, diremos apenas que ***f é derivável****.*

Assim, se f for derivável no ponto a, teremos, por definição,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{1}$$

Considerando a mudança de variável $h = x - a$, temos que $x = a + h$ e $x \to a$ se, e só se, $h \to 0$; portanto, a relação anterior equivale a

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \tag{2}$$

[1] Veja o módulo *Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 1.*

[2] Confira a 1ª definição da aula *Continuidade em um ponto - Parte III* do módulo anterior.

Como exemplo inicial, se f for uma função constante, $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{c - c}{x - a} = 0,$$

de modo que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

Assim, f é derivável e $f'(a) = 0$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Nesse sentido, diz-se frequentemente que "a derivada da constante é zero".

Para outro exemplo, se f for uma função afim, digamos $f(x) = bx + c$, com $b,c \in \mathbb{R}$, temos, para qualquer $x \neq a$ e se $b \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{(bx + \cancel{c}) - (ba + \cancel{c})}{x - a} = \frac{b(\cancel{x - a})}{\cancel{x - a}} = b.$$

Assim,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b.$$

Portanto, f é derivável e $f'(a) = b$, para cada $a \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, toda função afim é derivável e sua derivada em um ponto qualquer é a própria taxa de variação da função.

Para discutir a derivada de uma função f no ponto a, devemos primeiro considerar o *quociente de Newton*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, x \neq a,$$

passando, então, à sua "simplificação". O intuito dessa simplificação é contornar a indeterminação $0/0$, típica do limite que define a derivada (pois, se f é contínua no ponto a, então $f(x) - f(a)$ e $x - a$ tendem a 0 quando $x \to a$).

Esse processo vai desde uma simples manipulação algébrica até o uso de argumentos mais elaborados envolvendo, por exemplo, o teorema do confronto.

Em todo caso, superada essa etapa, a análise da existência de $f'(a)$, bem como seu cálculo, devem seguir da teoria dos limites.

Exemplo 2. *Mostre que a função quadrática* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, *é derivável, com* $f'(a) = 2a$, *para cada número real* a.

Solução. Para $x \neq a$, temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = x + a.$$

Portanto, vemos que f é derivável no ponto a e

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a.$$

$\square$

Observação 3. *"Limite" é uma noção local. Portanto, se as funções* f *e* g *(definidas em* a*) coincidirem numa vizinhança do ponto* a*, então* f *será derivável no ponto* a *se, e só se,* g *também for derivável no ponto* a*; além disso, em caso afirmativo, vale* $f'(a) = g'(a)$.

Desse modo, se g *é a função modular,* g *coincide com a identidade no intervalo aberto* $(0, +\infty)$*, o que, pelos cálculos acima com funções afins, garante a existência de* $g'(a)$*, para todo* $a > 0$*, valendo* $g'(a) = 1$ *para tais* a*. De forma similar,* g *é derivável em cada número negativo, com* $g'(a) = -1$ *para cada* $a < 0$.

Resumindo, a função modular g *é derivável em cada ponto não nulo* a*, com*

$$g'(a) = \frac{|a|}{a}, \quad \forall\ a \neq 0.$$

Como veremos a seguir, g *não é derivável na origem.*

Sendo a derivada um limite, podemos considerar as *derivadas laterais*

$$f'_-(a) := \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

e

$$f'_+(a) := \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{4}$$

que, caso existam, chamam-se *derivada à esquerda* e *derivada à direita* de f no ponto a.

Se houver pontos no domínio I arbitrariamente próximos de a, tanto pela esquerda como pela direita de a, sabemos (como ocorre com todo limite e os limites laterais correspondentes) que a derivada $f'(a)$ existirá se, e somente se, as derivadas laterais $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$ existirem e forem iguais (sendo $f'(a)$, nesse caso, o valor comum das derivadas laterais).

Exemplo 4. *Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função modular, $g(x) = |x|$, mostre que g não é derivável no ponto $a = 0$.*

Solução. Calcularemos as derivadas laterais $g'_-(0)$ e $g'_+(0)$. Ora, se $x < 0$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1,$$

de onde se conclui a igualdade

$$g'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -1.$$

Analogamente, como

$$x > 0 \Rightarrow \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 1,$$

a relação $g'_+(0) = 1$ segue.

Tendo a função modular diferentes derivadas laterais na origem, conclui-se que tal função não é derivável na origem.

$\square$

2 Interpretando a derivada

2.1 A reta tangente

Observe a figura 2, na qual a reta t, de cor vermelha, é tangente ao gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ no ponto $(a,f(a))$.

Essa afirmação deve ser entendida, num primeiro momento, de modo intuitivo, no sentido de que pequenos subarcos $\mathcal{C}$ do gráfico de f em torno do ponto P assemelham-se à segmentos de reta de t, sendo essa similitude tão melhor quanto menor for o comprimento de $\mathcal{C}$. Acompanhe na figura 1 abaixo, em que, da esquerda para a direita, ilustramos a ampliação de uma porção cada vez menor do gráfico de f em torno de P.

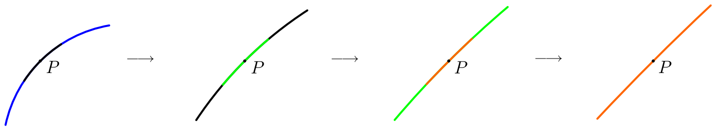

Figura 1

Para encontrar a reta tangente t analiticamente, tudo que precisamos é determinar sua inclinação.

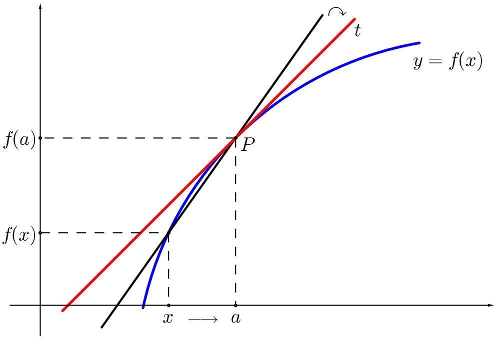

Figura 2

Para tanto, recorde que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

é a inclinação da secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(a,f(a))$ e $(x,f(x))$. Quando $x \to a$, essa secante "tende" à reta tangente t. Portanto, é natural definir a inclinação da tangente como o limite, quando $x \to a$, das inclinações das secantes, isto é, como a derivada de f em a.

Definição 5. *Se f for derivável em a, definimos a* ***tangente ao gráfico de f no ponto $(a,f(a))$*** *como a reta que passa por esse ponto com inclinação $f'(a)$. Portanto, a equação cartesiana dessa tangente será*

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Para efeito de ilustração, de acordo com o exemplo 2, a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto (a,a^2) tem equação $y = a^2 + 2a(x-a)$ ou, ainda, $y = 2ax - a^2$. Essa informação permite estabeler uma importante propriedade das parábolas.

Para compreender o enunciado do próximo exemplo, sugerimos ao leitor as primeiras páginas da aula *Parábolas* do módulo de cônicas.

Exemplo 6. *Considere uma parábola $\mathcal{P}$, de foco F e diretriz d, e seja $A \in \mathcal{P}$. Se r é a paralela ao eixo de $\mathcal{P}$ por A, mostre que a reta tangente a $\mathcal{P}$ passando por A é a bissetriz do ângulo formado por r e $\overleftrightarrow{AF}$. (Veja a figura 3.)*

Solução. Escolhendo o sistema de coordenadas de tal forma que $F = (0,1/4)$ e $d : y = -1/4$, a parábola $\mathcal{P}$ terá equação $y = x^2$. Assim, se $A = (a,a^2)$ e B for a projeção ortogonal de A na diretriz d, teremos $B = (a,-1/4)$. Como vimos acima, a reta tangente t à parábola $\mathcal{P}$ pelo ponto A tem equação $y = 2ax - a^2$. Daí, é fácil verificar que

$$M = \left(\frac{a+0}{2},\frac{-1/4+1/4}{2}\right) = (a/2,0),$$

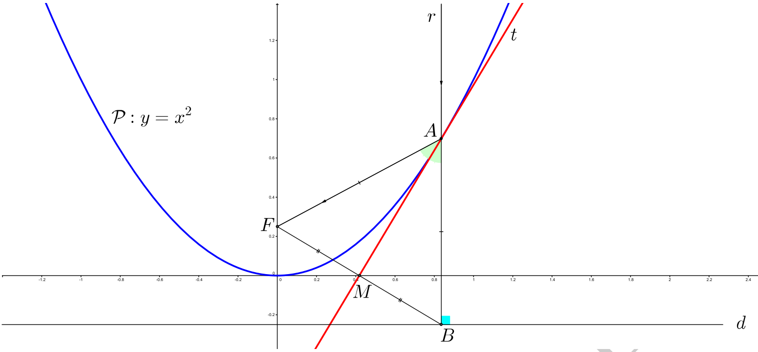

Figura 3

o ponto médio do segmento BF, pertence à reta t.

Por outro lado, pela definição de parábola, temos $\overline{AB} = \overline{AF}$, de forma que BAF é um triângulo isósceles de base BF. Logo, a mediana AM também é bissetriz de ABF, ou seja, a tangente $t = \overleftrightarrow{AM}$ bissecta o ângulo formado por r e $\overleftrightarrow{AF}$. $\square$

Observação 7. *O exemplo 6 traduz a* ***propriedade refletora*** *da parábola:* todo raio, paralelo ao eixo de uma parábola, ao nela incidir, é refletido no foco.

2.2 Taxa de variação instantânea

Na aula *Continuidade em um ponto - Parte III*, do módulo anterior, definimos (após o exemplo 11) o conceito de *taxa de variação média* de uma função. Recordando, se a e x são pontos distintos no domínio I da função f, então

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

é a taxa de variação média de f, de a até x.

Desse modo, se f é derivável em a, $f'(a)$ é o limite, quando $x \to a$, das taxas de variação média de f de a até x. Nesse contexto, dizemos que $f'(a)$ é a **taxa de variação instantânea** de f no ponto a.

Perceba que, se $\Delta x = x - a$ for a variação da variável independente (a partir de a) e $\Delta y = f(x) - f(a)$ for a variação correspondente da variável dependente, teremos (por (2), com Δx no lugar de h)

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

de modo que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a)$, para $\Delta x \approx 0$, ou melhor,

$$\Delta y \approx f'(a)\Delta x, \text{ [3]} \tag{5}$$

se $\Delta x \approx 0$.

Assim, a taxa de variação instantânea $f'(a)$ é *quase* um fator de proporcionalidade direta entre as variações Δx e Δy, permitindo estimar de forma simples (e, como veremos, acurada), de acordo com (5), as variações Δy correspondentes a "pequenas" variações Δx.

Para ilustrar esse ponto, digamos que uma tela quadrada, projetada para ter 1 m de lado, tenha sido construída com 99 cm de lado. Vamos estimar a variação da área da tela.

Ora, a área (em m^2) $y = f(x)$ de uma tela quadrada com x m de lado é $y = x^2$, de sorte que a variação da área se expressa como $\Delta y = f(0{,}99) - f(1)$. Tomando $a = 1$ e $\Delta x = -0{,}01$ em (5), obtemos (pelo exemplo 2)

$$\Delta y \approx f'(1)\Delta x = 2 \cdot (-0{,}01) = -0{,}02,$$

uma boa aproximação, haja vista que o valor real de Δy é $\Delta y = 0{,}99^2 - 1^2 = -0{,}0199$.

Exemplo 8.

i) *Mostre que a função* sen *é derivável na origem e calcule* $\operatorname{sen}'(0)$.

ii) *Justifique a aproximação*

$$\operatorname{sen} x \approx x, \tag{6}$$

para $x \approx 0$.

[3]Adiante, discutiremos de forma precisa o quão boas são essas aproximações.

Solução. Pelo limite trigonométrico fundamental, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x-0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.\end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 \approx \operatorname{sen}'(0)(x-0)$, para $x \approx 0$, ou seja,

$$\operatorname{sen} x \approx x,$$

se $x \approx 0$. □

Quando $f(t)$ é a posição de uma partícula no instante t, uma taxa de variação média de f é chamada de *velocidade média* (no intervalo em que for calculada), enquanto a taxa de variação instantânea em t_0 (i.e., $f'(t_0)$) é a *velocidade* (*instantânea*) da partícula no instante t_0.

Por exemplo, se a partícula descrever um movimento retilínio uniforme (MRU), sabemos que existem reais v e s_0 tais que $f(t) = vt+s_0$, para cada t. Daí, $f' \equiv v$ e a velocidade da partícula é constante.

Por outro lado, se um corpo estiver em movimento retilínio uniformemente variado (MRUV), sua velocidade será uma função afim do tempo, isto é, $f'(t) = at + v_0$. Aqui, v_0 é a *velocidade inicial* da partícula e a é a taxa de variação da velocidade, isto é, a *aceleração* do corpo. Então, f será uma função quadrática do tempo.

Podemos nos *convencer* desse fato da seguinte forma: pela relação (7) do exemplo 10, a função posição

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0,$$

com s_0 qualquer, tem a mesma (função) velocidade que f. Escolhendo $s_0 = f(0)$, as funções f e s agora têm, além da mesma velocidade, a mesma posição inicial, o que nos leva a concluir a igualdade $f = s$ [4].

[4] O resultado que justifica o argumento é o seguinte: *se I é um intervalo e $f,g : I \to \mathbb{R}$ têm a mesma derivada em cada ponto de I,*

Exemplo 9. *Enquanto o ponto* $P_t = (\cos t, \operatorname{sen} t), t \in \mathbb{R}$, *percorre o círculo unitário do plano cartesiano, sua projeção no eixo das ordenadas,* $f(t) = \operatorname{sen} t$*, descreve um movimento retilínio (MR) periódico. Justifique a seguinte afirmação:* analisando o MR entre os instantes $t = -\pi/2$ e $t = \pi/2$, percebemos que o ponto se move mais rapidamente ao passar pela origem.

Solução. Adiante, veremos que a função sen é derivável em todo ponto, de modo que a velocidade da função posição f está bem definida em cada instante. Pelos cálculos feitos na página 10 da aula *Continuidade em um ponto - Parte III*, do módulo anterior, temos

$$\left| \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t_0}{t - t_0} \right| \leq 1,$$

para quaisquer $t \neq t_0$. Fazendo $t \to t_0$ na desigualdade acima, obtemos $|f'(t_0)| \leq 1$, em cada instante t_0, ou seja, $|f'|$, a *velocidade escalar* do corpo, nunca ultrapassa 1.

Por outro lado, temos $f'(0) = \operatorname{sen}'(0) = 1$ (vide exemplo anterior), de sorte que o ponto $f(t)$ adquire velocidade máxima na origem. $\square$

3 Mais alguns exemplos

Exemplo 10. *Se* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é a função quadrática* $s(t) = at^2 + bt + c$*, calcule* $s'(t)$.

Solução. Vejamos que

$$s'(t) = 2at + b, \tag{7}$$

então f e g diferem por uma constante. Embora tal resultado possa ser provado diretamente, podemos obtê-lo como um simples corolário de uma proposição central na teoria: o *Teorema do Valor Médio*. Acompanhe as próximas aulas.

para cada $t \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} s'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(t+h)^2 + b(t+h) + c - (at^2+bt+c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{at^2} + 2ath + ah^2 + \cancel{bt} + bh + \cancel{c} - (\cancel{at^2} + \cancel{bt} + \cancel{c})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2at+b+ah)}{\cancel{h}} \\ &= \lim_{h\to 0} (2at+b+ah) = 2at+b, \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Observação 11. *Na proposição 8 da aula* Funções Racionais *do módulo de introdução ao cálculo - leis do limite - parte 2, o leitor encontrará o cálculo da derivada de um polinômio qualquer e, mais geralmente, da derivada de uma função racional.*

Exemplo 12. *Calcule uma aproximação de $\sqrt{101}$ e estime o erro.*

Solução. Convém definirmos $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sqrt{x}$. Assim, a partir da derivada $f'(100)$ e da relação 5, obteremos uma aproximação para

$$\Delta y = f(101) - f(100) = \sqrt{101} - 10,$$

relativa à variação $\Delta x = 101 - 100 = 1$. Ora, para cada $a > 0$,[5] temos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{a}}}{(\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{a}})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

[5] O leitor pode verificar que a função raiz quadrada não é derivável na origem.

Portanto, $f'(100) = 1/20 = 0{,}05$ e

$$\Delta y \approx f'(100)\Delta x = 0{,}05 \cdot 1 = 0{,}05,$$

de forma que

$$\sqrt{101} = 10 + \Delta y \Rightarrow \sqrt{101} \approx 10{,}05.$$

Podemos estimar o erro nas aproximações acima da seguinte forma:

$$0 < 10{,}05 - \sqrt{101} = \frac{10{,}05^2 - 101}{10{,}05 + \sqrt{101}} < \frac{0{,}0025}{20} = 0{,}000125.$$

□

Exemplo 13. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a equação funcional*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2, \tag{8}$$

para quaisquer números reais x e y. Se

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

prove que f é derivável e calcule $f'(x)$, para cada número real x.

Solução. O cálculo abaixo mostra que f é derivável, valendo $f'(x) = 1 + x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, observando que

$$f'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y},$$

a equação funcional (8) dá

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{f(y) + x^2y + xy^2}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \left(\frac{f(y)}{y} + x^2 + xy \right) \\ &= 1 + x^2 + x \cdot 0 = 1 + x^2. \end{aligned}$$

$\square$

Dicas para o Professor

Em relação à observação 7, o professor pode explorar as aplicações associadas à propriedade refletora da parábola a partir do seu uso na construção de antenas parabólicas, faróis de automóveis, microfones parabólicos, etc.

A aproximação (6) é muito útil em Física. Confira o artigo [4] para alguns exemplos.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.

3. J. Stewart. *Cálculo, volume* 1. 5ª ed. Thomson, 2006.

4. *Small-angle approximation.* https://en.wikipedia.org/wiki/Small-angle_approximation