Material Teórico - Módulo de Divisibilidade

Exercícios sobre Divisibilidade

Sexto Ano

Prof. Angelo Papa Neto

Portal da Matemática
OBMEP

Nos exemplos a seguir, escreveremos uma sequência de letras entre parênteses quando quisermos denotar os algarismos que compõem um certo número. Assim, por exemplo, escreveremos $n = (ab)$ para indicar que o número natural n tem dois algarismos, a na casa das dezenas e b na casa das unidades, enquanto $n = ab$ ou $n = a \cdot b$ para indicar que n é igual ao produto de a e b.

Quando os símbolos usados para se escrever um número forem apenas numéricos, adotaremos a notação usual. Por exemplo, escreveremos 2015 e não (2015).

Exemplo 1. *Determine o algarismo das unidades de*

$$N = 5^{2014} \cdot 7^{2015}.$$

Solução: o número N é ímpar e múltiplo de 5, logo o seu algarismo das unidades só pode ser 5.

Exemplo 2. *Encontre o algarismo das unidades do número*

$$2 \cdot 5^{2014} + 6^{2015} + 4^{2012}.$$

Solução: primeiro devemos observar que 5^{2014} (como ocorre com toda potência de 5) termina em 5, logo $2 \cdot 5^{2014}$ termina em 0 e, por isso, não contribui para o algarismo das unidades da soma dada. Dessa forma, o algarismo das unidades da soma será igual ao algarismo das unidades de $6^{2015} + 4^{2012}$. Como todas as potências de 6 terminam em 6, o número 6^{2015} termina em 6. Quanto às potências de 4, temos o seguinte padrão:

n	Algarismo das unidades de 4^n
1	4
2	6
3	4
4	6
$\vdots$	$\vdots$

Ou seja, 4^n termina em 4 se n é ímpar e termina em 6 se n é par. Como 2012 é par, 4^{2012} termina em 6 e, portanto, as contribuições de $2 \cdot 5^{2014}$, 6^{2015} e 4^{2012} para o algarismo das unidades da soma são, respectivamente, $0, 6$ e 6. Assim, o algarismo das unidades de $2 \cdot 5^{2014} + 6^{2015} + 4^{2012}$ é o mesmo de $0 + 6 + 6$, ou seja, é 2.

Exemplo 3. *Mostre que todo inteiro com três algarismos* (aaa)*, todos iguais, é múltiplo de* 37.

Solução: todo número formado por exatamente três algarismos iguais é múltiplo de 111: $(aaa) = a \cdot 111$. Como $111 = 3 \cdot 37$, temos que $(aaa) = a \cdot 3 \cdot 37$ é múltiplo de 37.

Exemplo 4. *Mostre que todo número inteiro formado por seis algarismos* $(aaaaaa)$*, todos iguais, é múltiplo de* 37 *e de* 39.

Solução: como no exemplo 3, $(aaaaaa) = a \cdot 111111$. A fatoração do número 111111 como produto de primos é

$$111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

Em particular, 111111 é múltiplo de 37 e de $3 \cdot 13 = 39$.

Exemplo 5. *Escreve-se à esquerda de um número inteiro de dois algarismos o dobro desse número. Mostre que o novo número assim obtido é múltiplo de* 67.

Solução: vamos começar analisando um exemplo numérico: se o número de dois algarismos é 36, o seu dobro é 72, que colocado à esquerda de 36 fornece o número 7236. Temos: $7236 = 7200 + 36 = 36 \cdot 200 + 36 = 36 \cdot (200 + 1) = 36 \cdot 201 = 36 \cdot 3 \cdot 67$ é múltiplo de 67.

Em geral (e como no exemplo numérico acima), se n é um número de dois algarismos, colocar o dobro de n à esquerda de n significa somar $2n \cdot 100$ a n. O número obtido é $200n + n = 201n = 3 \cdot 67 \cdot n$, que é múltiplo de 67.

Exemplo 6. *Determine os algarismos a e b de modo que o número* $(514ab)$ *seja divisível por* 72.

Solução: como $72 = 8 \cdot 9$ e 8 e 9 são primos entre si, o número $N = (514ab)$ é divisível por 72 se, e somente se, for divisível por 8 e por 9.

O critério de divisibilidade por 9 diz que o número N é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9, ou seja, $5 + 1 + 4 + a + b = 9k$, onde k é inteiro. Assim, $a + b + 1 = 9(k - 1)$ o que significa que a soma $a + b$ deve deixar resto 8 quando dividida por 9. Como a e b são algarismos, temos $0 \le a + b \le 18$. Assim, as únicas possibilidades são $a + b = 8$ ou $a + b = 17$. Se $a + b = 8$, então $(a, b) \in \{(0,8),(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1),(8,0)\}$. Se $a + b = 17$, então $(a, b) \in \{(8, 9), (9, 8)\}$.

Lembre-se, agora, de que N também deve ser divisível por 8. Para tanto, como

$$N = 51000 + (4ab) = 6375 \cdot 8 + (4ab),$$

é necessário e suficiente que o número $(4ab)$, formado pelos seus três últimos algarismos de N, seja divisível por 8. A tabela abaixo exibe, para cada um dos pares de algarismos (a, b) obtidos anteriormente, o número $(4ab)$ e se esse número é ou não divisível por 8.

(a, b)	$4ab$	Divisível por 8?
$(0, 8)$	408	Sim
$(1, 7)$	417	Não
$(2, 6)$	426	Não
$(3, 5)$	435	Não
$(4, 4)$	444	Não
$(5, 3)$	453	Não
$(6, 2)$	462	Não
$(7, 1)$	471	Não
$(8, 0)$	480	Sim
$(9, 8)$	498	Não
$(8, 9)$	489	Não

Dessa forma, os únicos possíveis valores para a e b são $a = 0$ e $b = 8$, que fornecem o número $N = 51408 = 8{\cdot}6426$, ou $a = 8$ e $b = 0$, que fornecem o número $N = 51480 = 8 \cdot 6435$.

Exemplo 7 (OBMEP - 2007, Banco).

(a) *Qual é o menor múltiplo (positivo) de* 9 *que é escrito apenas com os algarismos* 0 *e* 1*?*

(b) *Qual é o menor múltiplo (positivo) de* 9 *que é escrito apenas com os algarismos* 1 *e* 2*?*

Solução: (a) Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for um múltiplo de 9. Como o número considerado tem apenas (possivelmente) algarismos 0 e 1, o menor número possível é aquele formado por 9 algarismos 1: 111111111.

(b) Usando novamente o critério de divisibilidade por 9, devemos compor um número com o maior número possível de algarismos 2, para que a soma 9 seja atingida com um mínimo de algarismos. O número procurado é, portanto: 12222.

Exemplo 8 (OBMEP - 2011, Banco). *Encontre o menor múltiplo de* 9 *que não possui algarismos ímpares.*

Solução: seja n o número procurado. Sendo n um múltiplo de 9, a soma de seus algarismos deve ser um múltiplo de 9. Como os algarismos são todos pares, essa soma também deve par e, portanto, um múltiplo de 18. Não existem números de um algarismo com essa propriedade e o único número de dois algarismos cuja soma dos algarismos é divisível por 18 é 99. Mas os algarismos de 99 são ímpares. Logo, o número n deve ter, no mínimo, três algarismos. Como os algarismos de n são pares, o algarismo das centenas é no mínimo 2. Sendo a soma dos três algarismos um múltiplo de 18, essa soma é necessariamente igual a 18, pois o próximo múltiplo de 18, que é 36, não pode ser atingido por uma soma de três algarismos (a qual é sempre menor do que $10 + 10 + 10 = 30$). Dessa forma, $n = (2ab)$ (sendo a e b seus outros dois algarismos), com $2 + a + b = 18$ e a e b pares e tais que $0 \leq a, b \leq 9$. Assim, $a + b = 16$ e os únicos valores possíveis para a e b são $a = b = 8$. Portanto, o menor valor possível para n é $n = 288$.

Exemplo 9. *O número* n *começa com o algarismo* 7*:* $n = (7ab...z)$*. Se esse algarismo for transferido para o final do número, obtemos o número* $m = (ab...z7)$*. Encontre o menor* n *tal que* $n = 3 \cdot m$*.*

Solução: a igualdade $n = 3m$ pode ser reescrita como $(7ab...z) = 3 \cdot (ab...z7)$. Vamos construir o número n da direita para a esquerda. Como $3 \cdot 7 = 21$, o algarismo z é igual a 1. Logo $m = (ab...y17)$ e $(7ab...y1) = 3 \cdot (ab...y17) = (...51)$, o que implica $y = 5$. Os primeiros passos da construção são os seguintes:

$$\begin{array}{rr} & 7 \\ \times & 3 \\ \hline ... & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 1 & 7 \\ \times & & 3 \\ \hline & 5 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 5 & 1 & 7 \\ \times & & & 3 \\ \hline & 5 & 5 & 1 \end{array}$$

Note que cada algarismo que aparece na última linha deve ser repetido na primeira linha e na coluna imediatamente à esquerda. Dessa forma o número n vai "nascendo" na linha de cima e o número m vai "nascendo" na linha de baixo.

Repetimos esse procedimento até que o resultado de um produto por 3 mais uma "carga" vinda da coluna anterior seja exatamente 7. Isso só ocorre após várias repetições:

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 413 & 793 & 103 & 448 & 275 & 862 & 068 & 965 & 517 \\ \times & & & & & & & & & 3 \\ \hline 7 & 241 & 379 & 310 & 344 & 827 & 586 & 206 & 896 & 551 \end{array}$$

Assim, o menor valor para n é

$$n = 7.241.379.310.344.827.586.206.896.551$$

Exemplo 10. *Apagando o algarismo das unidades do número* n*, obtemos o número* m*. Sabendo que* m *divide* n*, determine os possíveis valores de* n*.*

Solução: seja a o algarismo das unidades do número n. Então $n = 10 \cdot m + a$. Se $a = 0$, então $n = 10 \cdot m$ e m divide n. Assim, qualquer número cujo algarismo das unidades é 0 satisfaz a condição do problema.

Considere $a \neq 0$. Dizer que m divide n é o mesmo que dizer que $n = m \cdot k$, onde k é um número inteiro. Substituindo na igualdade $n = 10 \cdot m + a$, obtemos $m \cdot k = 10 \cdot m + a$. Logo, $m \cdot (k - 10) = a$ (*), ou seja, m divide a e, em particular, $m \leq a$. Como a é um algarismo, temos $m \leq a < 10$. Assim, $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. O número n tem, portanto, 2 algarismos ($n = (ma)$). A determinação desses algarismos depende do valor de k.

Como $m \geq 1$ e $a < 10$, o produto em (*) garante que $1 \leq k - 10 < 10$. Assim, temos $k \in \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$.

- Se $k = 11$, então, por (*), $m = a$. Neste caso, como $n = 10 \cdot m + a = 11 \cdot a$, concluímos que n pode ser igual a $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$.
- Se $k = 12$, então, por (*), $a = 2 \cdot m$ e obtemos os seguintes valores para n: $12, 24, 36, 48$.
- Se $k = 13$, então $a = 3 \cdot m$ e possíveis valores de n são $13, 26, 39$.
- Se $k = 14$, n pode ser igual a 14 ou 28.
- Para $15 \leq k \leq 19$ temos os possíveis valores para n: $15, 16, 17, 18, 19$.

Portanto, os números que satisfazem a condição do problema são: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 26, 28, 33, 36, 39, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99 e qualquer número terminado em 0.

Observação 11. *Nos exemplos a seguir, usaremos os seguintes fatos importantes: fixado um número natural $n > 0$, se a e b deixam restos r e s quando divididos por n, então:*

(a) *a soma $a + b$ deixa o mesmo resto que $r + s$ quando dividida por n;*

(b) *o produto ab deixa o mesmo resto que rs quando dividido por n.*

(c) *para $k \in \mathbb{N}$, a potência a^k deixa o mesmo resto que r^k quando dividido por n.*

Para justificar os fatos acima, escrevemos $a = nk + r$ (1) e $b = nq + s$ (2). Escrevemos também $r + s = n\ell + u$ (3) e $rs = nm + v$ (4), onde r, s, u e v, sendo restos de divisões por n, são todos maiores ou iguais a zero e menores do que n.

Para o item (a), somemos (1) e (2) para obter $a + b = n(k + q) + (r + s)$. Mas, pela igualdade (3), $a + b = n(k + q) + (r + s) = n(k + q) + n\ell + u$, logo $a + b = n(k + q + \ell) + u$ e o resto da divisão de $a + b$ por n é u, que o mesmo resto que $r + s$ deixa quando dividido por n.

Para (b), multipliquemos as relações (1) e (2), obtendo $ab = (nk + r)(nq + s) = n^2kq + nks + nqr + rs$. Usando a igualdade (4), podemos escrever $ab = n(nkq + ks + qr + m) + v$, logo o resto da divisão de ab por n é v, que é o mesmo resto que rs deixa quando dividido por n.

Por fim, para o item (c), fazendo $b = a$ e $s = r$ em (b), concluímos que a^2 deixa o mesmo resto que r^2 por n; agora, fazendo $b = a^2$ e $s = r^2$ em (b), concluímos que $ab = a^3$ deixa o mesmo resto que $r^2r = r^3$ por n; prosseguindo analogamente, concluímos que a^k deixa o mesmo resto que r^k por n.

Exemplo 12. *Prove que*

$$2222^{5555} + 5555^{2222}$$

é divisível por 7.

Solução: o resto da divisão de 2222 por 7 é 3 e o resto da divisão de 5555 por 7 é 4. Pela observação 11 (c), 2222^{5555} e 5555^{2222} deixam os mesmos restos que 3^{5555} e 4^{2222}, respectivamente, quando divididos por 7. Usando a parte (a) da observação 11, vemos que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ deixa o mesmo resto que $3^{5555} + 4^{2222}$ quando dividido por 7.

Vejamos, agora, qual é o comortamento dos restos que as potências de 3 e de 4 deixam quando divididas por 7. Primeiro as potências de 3: $3^1 = 3$ deixa resto 3 quando dividido por 7, $3^2 = 9$ deixa resto 2 quando dividido por 7, $3^3 = 27$ deixa resto 6 quando dividido por 7, $3^4 = 81$ deixa resto 4 quando dividido por 7, $3^5 = 243$ deixa resto 5 quando dividido por 7 e $3^6 = 729 = 7 \cdot 104 + 1$ deixa resto 1 quando dividido por 7. A partir de 3^7 os restos se repetem de 6 em 6. Como $5555 = 6 \cdot 925 + 5$, temos $3^{5555} = (3^6)^{925} \cdot 3^5$. Pelos itens (b) e (c) da observação 11, concluímos que 3^{5555} deixa o mesmo resto que $1^{925} \cdot 3^5 = 3^5$ quando dividido por 7, ou seja, 3^{5555} deixa resto 5 quando dividido por 7.

Para as potências de 4 argumentamos analogamente, observando inicialmente que $4^3 = 64 = 7 \cdot 9 + 1$ deixa resto 1 quando dividido por 7. Agora, como $2222 = 3 \cdot 740 + 2$, vemos que $4^{2222} = (4^3)^{740} \cdot 4^2$. Portanto, novamente pelos itens (b) e (c) da observação 11, 4^{2222} deixa o mesmo resto que $1^{740} \cdot 4^2 = 16$ quando dividido por 7, isto é, 4^{2222} deixa resto 2 quando dividido por 7.

Portanto, pela observação 11 (a), $2222^{5555} + 5555^{2222}$ deixa o mesmo resto que $5 + 2 = 7$ quando dividido por 7, ou seja, $2222^{5555} + 5555^{2222}$ deixa resto 0 quando dividido por 7.

Exemplo 13. *Determine o resto da divisão do número*

$$3^{7^{145}}$$

por 17.

Solução: vamos começar observando que 3^{16} deixa resto 1 quando dividido por 17. De fato, $3^4 = 81$ deixa resto 13 quando dividido por 17 e $3^8 = 3^4 \cdot 3^4$ deixa o mesmo resto que $13 \cdot 13 = 169$ quando dividido por 17 (observação 11,(b)); mas, como $169 = 17 \cdot 9 + 16$, concluímos que 3^8 deixa resto 16 quando dividido por 17. Finalmente, usando novamente a observação 11 (b), vemos que $3^{16} = 3^8 \cdot 3^8$ deixa o mesmo resto que $16 \cdot 16 = 256 = 17 \cdot 15 + 1$ quando dividido por 17, ou seja, 3^{16} deixa resto 1 quando dividido por 17.

Por que é importante encontrar uma potência que deixe resto 1? Porque podemos proceder como no exemplo anterior e simplificar o cálculo do resto da expressão dada: para a potência 3^n, dividindo n por 16 obtemos $n = 16q + r$, onde $0 \leq r < 16$. Assim, como $3^n = 3^{16q+r} = (3^{16})^q \cdot 3^r$, o item (b) da observação 11 garante que 3^n deixa o mesmo resto que $1^q \cdot 3^r = 3^r$ quando dividido por 17. Isso significa que tudo que temos que fazer é dividir o expoente n por 16, encontrar o resto dessa divisão e, em seguida, calcular o resto que 3^r deixa por 17.

No nosso exemplo, $n = 7^{145}$. Devemos, então, buscar um padrão nos restos que as potências de base 7 deixam quando divididas por 16. Como $7^2 = 49 = 3 \cdot 16 + 1$, a observação 11 (b) garante que $7^{2k} = (7^2)^k$ deixa o mesmo resto que $1^k = 1$ quando dividido por 16 e $7^{2k+1} = (7^2)^k \cdot 7$ deixa o mesmo resto que $1^k \cdot 7$ quando dividido por 16. Os possíveis restos da divisão de uma potência 7^n por 16 são, portanto, 1, se n é par, ou 7, se n é ímpar. Como 145 é ímpar, 7^{145} deixa resto 7 quando dividido por 16, ou seja, $7^{145} = 16q + 7$. Logo, uma vez mais pelo item (b) da observação 11, segue que $3^{7^{145}} = 3^{16q+7} = (3^{16})^q \cdot 3^7$ deixa o mesmo resto que $1^q \cdot 3^7 = 3^7$ quando dividido por 17.

Para finalizar, $3^7 = 3^3 \cdot 3^4 = 27 \cdot 81 = 2187 = 128 \cdot 17 + 5$, que deixa resto 5 quando dividido por 17. Assim, $3^{7^{145}}$ deixa resto 5 quando dividido por 17.

Exemplo 14. *Determinar em que dia da semana caiu ou cairá uma certa data no passado ou no futuro.*

Solução: primeiro, um pouco de história. O calendário juliano foi introduzido em 46 d.C. e usado no Ocidente até 1582. Ele previa um dia adicional para cada quatro anos, assim como o calendário atual, mas isso provocou um erro que fez o calendário juliano ganhar um dia adicional, em relação ao dia astronômico, aproximadamente a cada 128 anos.

Em 1582, o papa Gregório XIII revisou o calendário, eliminando 10 dias para corrigir o erro acumulado. Anos divisíveis por 4 continuaram ganhando um dia extra (o dia 29 de fevereiro), exceto os anos divisíveis por 100 mas não por 400. Essas exceções são exatamente para evitar o erro que ia se acumulando no calendário juliano. Os anos com 366 dias são chamados bissextos.

De acordo com a regra que acabamos de explicar, anos como 1988, 1996, 2004 e 2016 são bissextos, pois esses números são múltiplos de 4. Por outro lado, os anos 1700, 1800 e 1900 não são bissextos, pois são múltiplos de 100 e não são múltipos de 400. Já os anos 1600 e 2000 são bissextos, pois são múltiplos de 400.

A maior parte da Europa e suas colônias adotou o calendário gregoriano a partir do dia 4 de outubro de 1582, mas a Inglaterra e suas colônias só adotaram esse calendário a partir do dia 14 de setembro de 1752. Entre essas duas datas, os ingleses permaneceram com o antigo calendário juliano.

Como a semana tem 7 dias, o problema de determinar o dia da semana de uma data qualquer é um problema de divisibilidade por 7. Chamaremos esse problema de *problema do calendário.*

Se o número de dias de um ano fosse múltiplo de 7, o calendário não precisaria mudar de uma ano para outro. Mas, como $365 = 7 \cdot 52 + 1$, a passagem de um ano para o ano seguinte, no caso em que essa passagem não inclua o dia 29 de fevereiro, acrescenta um dia da semana ao calendário. Por exemplo, se seu aniversário em 2014 foi num sábado, seu aniversário em 2015 foi (ou será) num domingo. Já em 2016 isso depende, porque 2016 é bissexto. Se um aniversário, que em 2014 foi em um sábado e em 2015 foi num domingo, ocorre até o dia 28 de fevereiro, então em 2016, ele será em uma segunda-feira e em 2017 será em uma quarta-feira. Se ele ocorre depois do dia 28 de fevereiro, então em 2016 será numa terça-feira e em 2017 será em uma quarta-feira. Isso por conta do dia extra (29 de fevereiro).

Uma informação importante é a seguinte:

O calendário gregoriano se repete a cada 400 anos.

Por exemplo, se o dia 22 de abril de 2015 caiu numa quarta-feira, então o dia 22 de abril de 1615 também caiu numa quarta-feira e o dia 22 de abril de 2415 também cairá em uma quarta-feira.

Para justificar essa afirmação, vamos mostrar que em 400 anos há um número inteiro de semanas. De fato, um ano bissexto tem 52 semanas e 2 dias e um ano não bissexto tem 52 semanas e 1 dia. Em um período de 4 anos, dos quais 1 é bissexto, há $4 \cdot 52$ semanas e 5 dias. Ao longo de 400 anos, há um total de $5 \times 100 = 500$ dias a mais, mas como três desses anos são divisíveis por 100 mas não por 400 (logo, não são bissextos), o total de dias adicionais é $500 - 3 = 497 = 71 \cdot 7$. Assim, em 400 anos há exatamente $400 \cdot 52 + 71$ semanas.

Vamos adotar o seguinte esquema de codificação para os dias da semana:

Sab	Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex
0	1	2	3	4	5	6

e para os meses do ano:

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
1	4	4	0	2	5

Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
0	3	6	1	4	6

Os códigos referentes aos meses podem ser agrupados da seguinte maneira: 144.025.036.146, o que facilita a memorização, já que os três primeiros grupos formam quadrados perfeitos e o último é próximo ao primeiro.

Vamos usar as duas tabelas acima para resolvermos o problema do calendário. Comecemos com uma data do século XX: 22 de maio de 1930. Vamos seguir os passos abaixo:

1. Tome os dois últimos algarismos do ano, 30. Divida 30 por 4 e anote o **quociente**: 7.

2. Obtenha o resto da divisão do quociente acima por 7. No nosso caso, esse resto é 0.

3. Some o número obtido no item anterior ao número formado pelos dois últimos algarismos do ano: $0+30 = 30$.

4. Divida o número obtido no item anterior por 7 e anote o resto. No nosso caso, $30 = 7 \cdot 4 + 2$, o resto é 2.

5. Some o número obtido no item anterior, 2, ao dia do mês, 22, e ao código do mês, maio = 2. Obtemos $2 + 22 + 2 = 26$.

6. Divida o número do item anterior por 7 e anote o resto. No nosso caso, $26 = 3 \cdot 7 + 5$.

7. O número 5 corresponde, na tabela, à quinta-feira. Assim, o dia 22 de maio de 1930 foi uma quinta-feira.

O que estamos fazendo aqui é comparar um dia qualquer, a princípio no século XX, com o dia correspondente no ano 1900 (que não é bissexto). Ao dividirmos por 4 no primeiro passo, estamos calculando quantos anos bissextos ocorreram desde 1900 até o ano em questão. No nosso exemplo, ocorreram 7 anos bissextos.

No passo dois, ao dividirmos por 7, estamos calculando o impacto desses anos bissextos na mudança do dia da semana. No nosso caso, os 7 anos bissextos contribuíram cada um com 1 dia extra. Os 7 dias extras não alteram o dia da semana, por isso, obtivemos 0 nessa passagem.

No passo três, adicionamos a contribuição de cada ano comum ao avanço no calendário (a cada ano não bissexto se avança 1 dia).

No passo quatro, a divisão por 7 é novamente para excluirmos, do resultado do cálculo do passo três, tantos grupos de 7 dias quanto possível, já que eles não alteram o dia da semana.

O código do mês, que aparece no passo 5 e em uma das tabelas exibidas anteriormente, é um número que identifica o dia da semana em que caiu o primeiro dia do mês em 1900. Vejamos como encontrar esses códigos: o dia 1º de janeiro de 1900 caiu em uma segunda-feira. Chamando o codigo de janeiro de x, temos que a soma do código ao dia do mês, $x+1$, deve ser igual ao código da segunda-feira, que é 2. Assim, $x + 1 = 2$ e $x = 1$, ou seja, o código de janeiro é 1. De um dia em janeiro para o mesmo dia em fevereiro, passam-se 31 dias, isto é, 4 semanas e 3 dias. Assim, o código de fevereiro é $1 + 3 = 4$. Como 1900 não é bissexto, fevereiro teve 28 dias nesse ano, o que corresponde a quatro semanas extatas, e por isso o código de março também é 4. Continuando dessa maneira, é fácil determinar todos os códigos dos meses de 1900.

No passo cinco, na soma $2 + 22 + 2$, a primeira parcela, 2, corresponde ao código do mês que mede a alteração do dia da semana do primeiro dia de maio de 1900, em relação ao dia 1º de janeiro de 1900; a parcela 22 corresponde à alteração do dia da semana entre os dias 1º de maio de 1900 e 22 de maio de 1900; a última parcela, 2, corresponde à alteração do dia da semana de 1900 para 1930, sendo esse "2" calculado nos itens anteriores.

Finalmente, no sexto passo, deve-se dividir por 7 para se excluir as semanas inteiras, e no sétimo passo deve-se consultar a tabela para identificar o dia da semana pelo código respectivo, obtido no passo seis.

Para aplicarmos o método acima a outros séculos, devemos seguir as observações abaixo:

- Para datas a partir do ano 2000: subtraia 1 do resultado final;
- Para datas gregorianas:
  - Entre 1800 e 1899: some 2 ao resultado final;
  - Entre 1700 e 1799: some 4 ao resultado final;
  - Entre 1600 e 1699: some 6 ao resultado final;
  - Entre 15 de outubro de 1582 e 31 de dezembro de 1599: some 0 ao resultado final.
- Para uma data no calendário juliano, devemos fazer uma correção no resultado final, da seguinte maneira:
  - calcule $18 - a$, onde a é o número formado pelos dois primeiros algarismos do ano;
  - calcule o resto r da divisão de $18 - a$ por 7;
  - some o resultado final, obtido no sexto passo, a esse resto.

Exemplo 15 (Sexta-feira 13). *Explique porque todo ano tem pelo menos uma sexta-feira 13 e não mais do que três sextas-feiras 13.*

Solução: seja a código do dia da semana do dia 13 de janeiro de um determinado ano. Os possíveis valores para a são $0, 1, 2, \ldots, 6$, onde 0 corresponde ao sábado, 1 ao domingo, etc.

Primeiro, vamos supor que o ano em questão não é bissexto. Neste caso, janeiro, tendo $31 = 7 \cdot 4 + 3$ dias, faz o dia da semana avançar 3 unidades. Assim, o código do dia 13 de fevereiro é $a + 3$. Fevereiro tem $28 = 4 \cdot 7$ dias, logo 13 de março tem código $a + 3$. Continuando dessa forma, obtemos os códigos para os dias 13 ao longo do ano:

$$a, a+3, a+3, a+6, a+1, a+4, a+6, a+2, a+5, a+3, a+5.$$

Independentemente do valor de a, algum elemento da lista acima vai deixar resto 6 quando dividido por 7 (porque?), logo vai ser uma sexta-feira 13. Por outro lado, como $a + 3$ aparece três vezes na lista acima, se a for igual a 3, então o ano terá três sextas-feiras 13. Isso acontece precisamente quando o dia 13 de janeiro cai em uma terça-feira ($a = 3$).

Se o ano em questão é bissexto, argumentando como no parágrafo anterior, concluímos que os códigos para os dias 13 de cada mês são

$$a, a+3, a+4, a, a+2, a+5, a, a+3, a+6, a+1, a+4, a+6.$$

Novamente, para qualquer escolha de a um desses números deixa resto 6 quando dividido por 7. Logo há pelo menos uma sexta-feira 13. Por fim, se o dia 13 de janeiro for uma sexta-feira, o ano terá três sextas-feiras 13.

Dicas para o Professor

Embora a observação 11 possa ser usada para resolver exemplos do início da aula, é interessante que você procure tratar esses exemplos iniciais sem usar a técnica exposta nessa observação. Os exemplos 12 e 13, sendo mais elaborados, exigem o uso da informação dada na observação 11. Os exemplos de 1 a 10 podem ser vistos em duas aulas de

50 minutos cada, sendo que aos exemplos 9 e 10 deve ser reservado um tempo maior.

O problema do calendário pode ser explorado em duas aulas de 50 minutos. Esse problema dá margem a uma série de atividades bem interessantes que você pode fazer com seus alunos. Eles podem, por exemplo, descobrir em que dia da semana eles ou seus parentes nasceram. Também podem ser exploradas conexões com datas históricas.

A própria discussão sobre a necessidade de um calendário e o seu aperfeiçoamento ao longo dos séculos tem um grande apelo histórico e também matemático. Registrar a passagem do tempo com precisão e detectar os padrões periódicos dos fenômenos naturais foi um dos grandes avanços da civilização. Sem esse controle seria inviável o desenvolvimento da agricultura, por exemplo. Isso só foi possível graças ao domínio das ferramentas matemáticas adequadas.

Essa é uma ótima oportunidade para que o aluno se conscientize de que a Matemática é uma aquisição fundamental da espécie humana. Sua presença ao longo dos séculos é incontornável na construção da civilização na qual hoje vivemos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. J.P. de Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, IMPA, 1998.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo, Nobel, 1989.

3. Carneiro, E., Campos, O., Paiva, M. *Olimpíadas Cearenses de Matemática, 1981 - 2005, Nível Fundamental*, Rio de janeiro, SBM, 2006.

4. Carneiro, E., Campos, O., Paiva, M. *Olimpíadas Cearenses de Matemática, 1981 - 2005, Nível Médio*, Rio de janeiro, SBM, 2006.

5. Shklarsky, D.O., Chentzov, N.N., Yaglom, I.M., *The URSS Olympiad Problem Book*. New York, Dover.

6. Fomin, D., Genkin, S., Itenberg, I. *Círculos Matemáticos, a experiência russa*, Trad. Valéria Iório, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

7. Domingues, Hygino H. *Fundamentos de Aritmética*, São Paulo, Ed. Atual, 1991.

8. Adler, A., Coury, J.E., *The Theory of Numbers, a text and source book of problems*, Boston, Jones and Barlett pub., 1995.