

Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana Parte 1

Triângulos

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto



PORTAL DA
MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Dados três pontos não colineares A , B e C no plano, o **triângulo** ABC é a união dos três segmentos de reta \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} (veja a Figura 1). Os pontos A , B e C são os **vértices**, os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} são os **lados** e os ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$ são os **ângulos internos** do triângulo ABC . Quando não houver perigo de confusão, as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC serão denotadas simplesmente por $\widehat{BAC} = \widehat{A}$, $\widehat{ABC} = \widehat{B}$ e $\widehat{ACB} = \widehat{C}$.

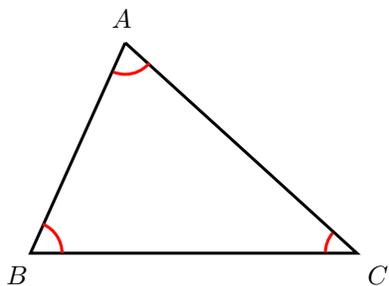


Figura 1: um triângulo ABC qualquer.

Agora, conforme mostrado na Figura 2, tomemos pontos D , E e F , respectivamente, sobre as semirretas \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{CB} e \overrightarrow{AC} . Os ângulos $\angle DAC$, $\angle ABE$ e $\angle BCF$ são três dos **ângulos externos** do triângulo ABC . Observe que, além dos ângulos externos mostrados na Figura 2, o triângulo ABC tem outros três ângulos externos, os quais são OPV aos ângulos externos mostrados na figura. (Sugerimos ao leitor, nesse momento, parar por um instante e, à guisa de exercício, marcar esses três outros ângulos externos.)

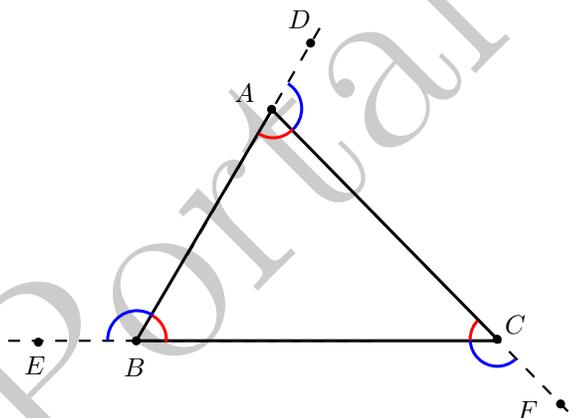


Figura 2: ângulos de um triângulo qualquer.

Definimos, ainda, o **interior** de um triângulo ABC como o interior da região convexa do plano delimitada pelos seus

lados. Dessa forma, o **exterior** de ABC é definido como o complementar da reunião entre o seu interior e o próprio triângulo ABC . (Veja a Figura 3.)

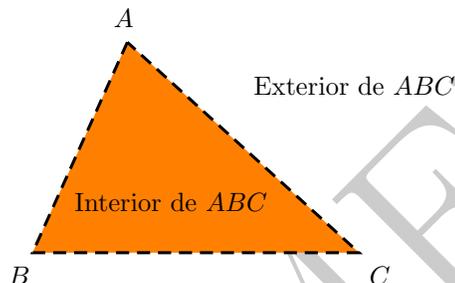


Figura 3: interior e exterior de um triângulo.

2 Classificação quanto aos lados

Os triângulos podem ser classificados em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos internos. Quanto aos lados, temos a seguinte classificação:

Um triângulo ABC é **equilátero** se

$$AB = AC = BC.$$

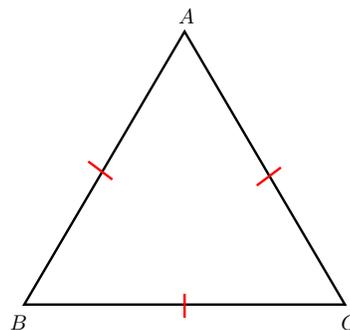


Figura 4: um triângulo equilátero ABC .

Um triângulo ABC é **isósceles** se

$$AB = AC \text{ ou } AB = BC \text{ ou } AC = BC.$$

Um triângulo ABC é **escaleno** se

$$AB \neq BC, AC \neq BC \text{ e } AB \neq AC.$$

Observe que a definição de triângulo isósceles não exclui a possibilidade de que os três lados do triângulo sejam

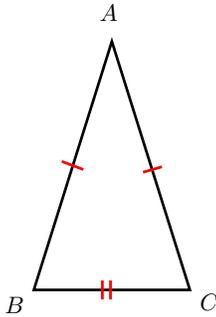


Figura 5: um triângulo isósceles ABC .

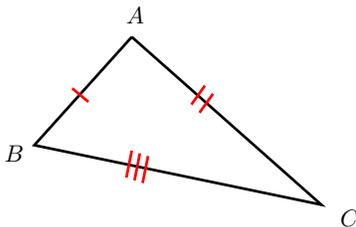


Figura 6: um triângulo escaleno ABC .

iguais. De outra forma, quando escrevemos “ $AB = AC$ ou $AB = BC$ ou $AC = BC$ ”, não estamos dizendo nada, em cada caso, sobre o comprimento do terceiro lado (que pode, ou não, ser igual ao comprimento dos outros dois lados). Assim, para triângulos isósceles, pede-se que *pele menos* dois lados tenham comprimentos iguais, de forma que

Todo triângulo equilátero é isósceles.

Por outro lado, no caso de triângulos escalenos, pede-se que os três lados do triângulo tenham comprimentos dois a dois distintos.

3 A soma dos ângulos de um triângulo

Dado um triângulo ABC cujos ângulos internos medem \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , considere um ponto D sobre o prolongamento do lado \overline{AB} , conforme mostrado na Figura 7.

Tracemos por A uma reta r , paralela ao lado \overline{BC} , e marquem um ponto E sobre r , também conforme mostrado na Figura 7. Veja que as retas r e \overrightarrow{AB} são paralelas, os ângulos $\angle DAE$ e $\angle ABC$ são correspondentes, e os ângulos $\angle EAC$ e $\angle ACB$ são alternos internos. Daí, temos

$$D\hat{A}C = D\hat{A}E + E\hat{A}C = A\hat{B}C + A\hat{C}B = \hat{B} + \hat{C}.$$

Podemos sintetizar a discussão feita acima no seguinte resultado:

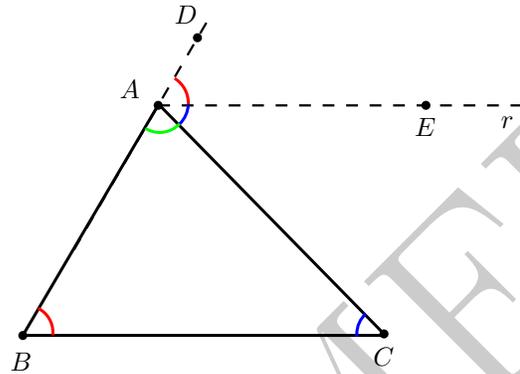


Figura 7: relação entre ângulos internos e externos.

Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo qualquer é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Uma consequência imediata, mas importantíssima, é o fato de que (nas notações da Figura 7)

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + D\hat{A}C = 180^\circ.$$

Assim, temos a seguinte propriedade dos ângulos internos de um triângulo:

Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é sempre igual a 180° .

Nos valeremos do fato acima para classificar os triângulos em relação às medidas de seus ângulos internos.

Mais precisamente, se \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} denotam as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC , então no máximo um dentre \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} pode ser maior ou igual a 90° . De fato, se fossem $\hat{A} \geq 90^\circ$ e $\hat{B} \geq 90^\circ$, por exemplo, teríamos

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \hat{A} + \hat{B} \geq 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

contradizendo a propriedade destacada acima.

Graças à discussão acima, a classificação dos triângulos quanto às medidas de seus ângulos internos contempla somente os seguintes casos:

Um triângulo é **acutângulo** se seus três ângulos internos são agudos, ou seja, se seus três ângulos internos medem menos que 90° .

Um triângulo é **obtusângulo** se possui um ângulo obtuso, isto é, se um de seus ângulos internos tem medida maior do que 90° .

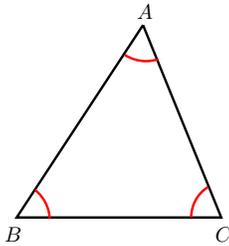


Figura 8: um triângulo acutângulo ABC .

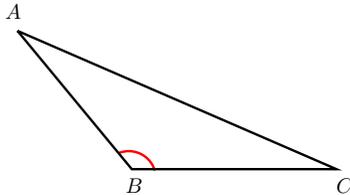


Figura 9: um triângulo obtusângulo ABC .

Um triângulo é **retângulo** se possui um ângulo interno reto, ou seja, se possui um ângulo interno cuja medida é igual a 90° .

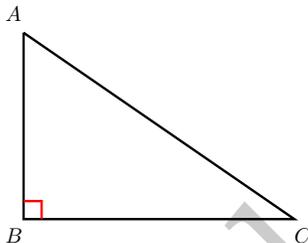


Figura 10: um triângulo retângulo ABC .

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir este material. Os conceitos relativos a triângulos devem ser fartamente ilustrados, a fim de que os alunos possam reconhecê-los sem dificuldade. O teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo deve ser deduzido, e não simplesmente enunciado, a fim de que os alunos apreciem a importância da utilização do método dedutivo em Geometria. É, porém, útil começar a discussão desse tema intuindo o resultado através de recortes com cartolina, por exemplo, pois isso facilitará a compreensão por parte dos alunos. As referências contêm mais material relacionado aos tópicos reunidos aqui.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.