Material Teórico - Módulo de NÚMEROS NATURAIS: REPRESENTAÇÃO E OPERAÇÕES BÁSICAS

Problemas

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de Novembro de 2020

1 Introdução

Neste último material do módulo iremos praticar os algoritmos apresentados anteriormente para realizar diversos cálculos. Além disso, resolveremos problemas que tratam sobre números naturais e suas operações e que foram propostos em diversas olimpíadas.

Exercício 1. *Calcule mentalmente* $1 + 357 + 17999$.

Solução. Usando as propriedades de comutatividade e associatividade, temos:

$$\begin{aligned} 1 + 357 + 17999 &= (1 + 17999) + 357 \\ &= 18000 + 357 \\ &= 18357. \end{aligned}$$

□

Exercício 2. *Na adição a seguir, A, B e C representam algarismos distintos. Quais são esses algarismos?*

$$\begin{array}{cccc} & A & A & A \\ + & B & B & B \\ \hline A & A & A & C \end{array}$$

Solução. Note que temos uma adição de dois números de três algarismos dando, como resultado, um número de quatro algarismos. Como $999 + 999 = 1998$, isso significa que A não pode ser maior do que 1; logo, $A = 1$. Agora, se B for no máximo 8, então a soma $AAA + BBB$ vale no máximo $111 + 888 = 999$, que só tem três algarismos. Como esse não é o caso, concluímos que $B = 9$ e, daí, que

$$AAA + BBB = 111 + 999 = 1110.$$

Portanto, $C = 0$. □

Exercício 3. *Multiplique* 101010101 *por* 57.

Solução. Usando a representação decimal de 101010101 e a distributividade, temos que

$$\begin{aligned} 101010101 \times 57 &= (10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 1) \times 57 \\ &= 10^8 \times 57 + 10^6 \times 57 + 10^4 \times 57 \\ &\quad + 10^2 \times 57 + 1 \times 57 \\ &= 5700000000 + 57000000 + 570000 \\ &\quad + 5700 + 57 \\ &= 5757575757. \end{aligned}$$

□

Exercício 4. *Um número de seis algarismos começa, à esquerda, por 1. Se tirarmos esse algarismo 1 do início e o colocarmos no final do número, o resultado será um número três vezes maior. Qual é o número de seis dígitos inicial?*

Solução. A condição dada no enunciado pode ser resumida como segue:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & B & C & D & E \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & B & C & D & E & 1 \end{array}$$

onde A, B, C, D e E são os demais algarismos (não necessariamente distintos) dos números.

Como $3 \times E$ termina em 1, temos que $E = 7$ e, na multiplicação, "vai 2" para a casa das dezenas. Assim, a multiplicação é

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & B & C & D & 7 \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & B & C & D & 7 & 1 \end{array}$$

e $3 \times D + 2$ termina em 7.

Portanto, $3 \times D$ termina em 5, de sorte que $D = 5$ e a multiplicação é

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & B & C & 5 & 7 \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & B & C & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

Como "foi 1" para a casa das centenas, temos $3 \times C + 1$ termina em 5, logo, $3 \times C$ termina em 4. Então, $C = 8$ e a multiplicação fica

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & B & 8 & 5 & 7 \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & B & 8 & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

Uma vez que "foi 2" pra casa das unidades de milhar, concluímos que $3 \times B + 2$ termina em 8, logo, $B = 2$. Então, ficamos com

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & 2 & 8 & 5 & 7 \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

Por fim, $3 \times A$ termina em 2, de modo que $A = 4$ e o cálculo final é

$$142857 \times 3 = 428571.$$

Assim, o número inicial é 142857. □

Exercício 5 (OBMEP). *Na adição a seguir, o símbolo* $\clubsuit$ *representa um mesmo algarismo. Qual é o valor de* $\clubsuit \times \clubsuit + \clubsuit$*?*

$$\begin{array}{cccc} & 4 & \clubsuit & 7 \\ + & 8 & 9 & 5 \\ \hline 1 & \clubsuit & \clubsuit & 2 \end{array}$$

Solução. No cálculo apresentado podemos observar o seguinte:

- Na coluna das unidades, como $7+5=12$, "vai 1"para a coluna das dezenas.
- Na coluna das dezenas, uma vez que $1+\clubsuit+9=10+\clubsuit$, o algarismo das dezenas da soma é $\clubsuit$ e "vai 1"para a coluna das centenas.
- Na coluna das centenas, como $1+4+8=13$, o algarismo das centenas da soma é 3 e vai 1 para a coluna dos milhares.

Assim, concluímos que $\clubsuit=3$ (note que a adição é $437+895=1332$). Logo, $\clubsuit\times\clubsuit+\clubsuit=3\times3+3=12$. $\square$

Exercício 6 (OBM). *A adição a seguir está incorreta. Entretanto, se substituirmos somente um certo algarismo a, toda vez que ele aparece, por um certo algarismo b, a conta fica correta. Qual é o valor de $a+b$?*

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

Solução. Numa primeira inspeção, notamos que os três algarismos à direita de todos os números estão corretos, isto é, estão corretamente escritos os algarismos 0, 1, 3, 4, 5, 6 e 8. Portanto, dentre os algarismos 2, 7 e 9, um está escrito incorretamente.

Olhando para a coluna dos milhares, podemos ver que o 9 está escrito corretamente, pois se o substituirmos por um outro algarismo, a soma com o 2 não estará correta. Logo, ou 2 ou 7 está incorreto.

Se o 7 estiver incorreto, então 2 estará correto. Entretanto, isto não é possível, pois a soma $2+4+1$, que aparece na colunas das dezenas de milhares, não estaria certa. Logo, 2 é o algarismo que deve ser substituído.

Olhando novamente a soma $2+4+1=11$, vemos que esta conta só ficará correta se substituirmos o 2 pelo 6. Fazendo essa substituição, verificamos que o restante da conta também fica correto. Então, $a+b=2+6=8$. $\square$

Exercício 7 (OBM 2006). *Na adição abaixo, cada símbolo representa um único algarismo e símbolos diferentes representam algarismos diferentes. Que algarismo cada símbolo representa?*

$$\begin{array}{rccc} & & \square & \triangle \\ + & & \triangle & \circledcirc \\ & & \circledcirc & \square \\ \hline & \square & \triangle & \circledcirc \end{array}$$

Solução. Veja que a soma de três números de dois algarismos é no máximo $99+99+99=297$. Portanto, $\square$ só pode ser 1 ou 2.

Observando a coluna das unidades, percebemos que $\square+\triangle=10$. Além disso, o "vai um" da soma das unidades faz com que a comparação feita na coluna das dezenas acarrete $\square+\circledcirc+1=10$, ou seja, $\square+\circledcirc=9$.

Agora, vamos analisar os casos $\square=1$ e $\square=2$:

- Se $\square=1$, então $\triangle=9$ e $\circledcirc=8$. Temos, pois, a adição:
$$19+98+81=198,$$
que é verdadeira.
- Se $\square=2$, então $\triangle=8$ e $\circledcirc=7$. Assim, a adição é:
$$28+87+72=287,$$
que não é verdadeira.

$\square$

Exercício 8. *Na adição abaixo, cada símbolo representa um único algarismo e símbolos diferentes representam algarismos diferentes. Qual o algarismo que cada símbolo representa?*

$$\begin{array}{rcc} & & \bigcirc \\ & & \bigcirc \\ + & & \bigcirc \\ & & \square \\ \hline & \square & \bigcirc \end{array}$$

Solução. Veja que a soma máxima possível é $9+9+9+8=35$. Portanto, $\square$ só pode ser 1, 2 ou 3. Além disso, como a adição é feita de acordo com o sistema decimal, temos:

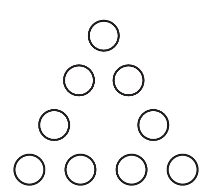
$$3\bigcirc+\square=10\square+\bigcirc.$$

Portanto,

$$2\bigcirc=9\square.$$

Da última igualdade segue que $\square$ deve ser par, logo, $\square=2$. Consequentemente, $\bigcirc=9$. $\square$

Exercício 9. *Mostre como colocar os números de 1 a 9 (um em cada círculo) nos nove círculos da figura abaixo, de modo que as somas dos números escritos em cada lado do triângulo sejam as mesmas e sejam as maiores possíveis.*



Solução. Observe que cada número escrito nas pontas do triângulo faz parte de dois lados, logo, faz parte de duas somas. Para que essas somas sejam máximas, os números escritos nessas pontas devem ser os maiores possíveis, ou seja, 9, 8 e 7.

Agora, veja que os números que já estão escritos em cada um dos lados do triângulo somam $9 + 8 = 17$, $9 + 7 = 16$ e $8 + 7 = 15$, os quais são três números inteiros consecutivos. Assim, os números que ainda não ocuparam lugar no triângulo, e somam $1+2+3+4+5+6 = 21$, devem ser separados em três grupos tais que as somas dos números em cada grupo também sejam números consecutivos.

Por outro lado, a soma dessas três somas é igual ao triplo da soma intermediária, de sorte que a soma intermediária vale $21 \div 3 = 7$. Assim, essas somas devem ser iguais a 6, 7 e 8, e os três grupos podem ser $\{2, 4\}$, $\{1, 6\}$ e $\{3, 5\}$ (veja se há outros grupos possíveis).

Por fim, uma possível distribuição dos números é como mostrado a seguir:

9
2 1
4 6
8 3 5 7

□

2 Sugestões aos professores

Utilize dois encontros de 50 minutos cada para desenvolver o conteúdo desta aula. Lembre-se de dar tempo aos alunos para pensarem nas questões. Motive-os a utilizar as propriedades das operações aritméticas, sempre chamando-as pelo nome.

Uma sugestão interessante é pedir aos alunos que resolvam primeiro as questões em grupos para, em seguida, escolher um voluntário do grupo para expor o raciocínio utilizado, no quadro, para toda a turma.

Por fim, use as referências listadas a seguir para buscar questões extras e propô-las aos estudantes.

Referências

[1] Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra.* IMPA, 2018.

[2] A. Gelfand, I.M. e Shen. *Algebra.* Birkhäuser Boston, 2003.