

Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 1 - Fundamentos

Pontos, Retas e Planos - Parte 3

Terceiro Ano - Médio

Auto: Prof. Angelo Papa Neto

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto



PORTAL DA
MATEMÁTICA
OBMEP

1 Separação do espaço por um plano

Nesta seção iremos demonstrar o seguinte fato, intuitivamente claro: um plano divide o espaço em dois subconjuntos disjuntos, chamados *semiespaços*. Este fato está em analogia com o que acontece na geometria plana, onde uma reta divide o plano em dois subconjuntos disjuntos chamados *semiplanos*.

Apesar de serem intuitivamente claros, esses fatos requerem um tratamento rigoroso, baseado apenas nos axiomas, e isso está longe de ser trivial.

Para demonstrarmos as afirmações acima, precisamos de axiomas que capturem a ideia de “estar entre”. Vamos usar alguns dos axiomas selecionados pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) em seu famoso livro *Fundamentos de Geometria*, publicado em 1899 (veja o item [7] das Sugestões de Leitura Complementar).

A ideia de “estar entre” é apresentada por Hilbert como uma *noção primitiva*, mais especificamente, como uma *relação ternária não definida*. Dados três pontos colineares (isto é, sobre uma mesma reta) A, B e C , usamos o símbolo $A * B * C$ para indicar que B está entre A e C . Essa relação satisfaz os seguintes axiomas, chamados **axiomas de ordem**, os quais capturam a ideia intuitiva que temos sobre a noção de *estar entre*:

- (O-1) Se $A * B * C$, então $C * B * A$.
- (O-2) Se A e B são pontos distintos sobre uma reta ℓ , então existem, em ℓ , dois pontos C e D tais que $A * C * B$ e $A * B * D$.
- (O-3) Se A, B e C são três pontos distintos sobre uma reta ℓ , então exatamente um dos três está entre os outros dois. Em símbolos, exatamente uma das três possibilidades a seguir ocorre: $A * B * C$, $A * C * B$ ou $B * A * C$.
- (O-4) (Axioma de Pasch) Dados três pontos não colineares (isto é, não todos sobre uma mesma reta) A, B e C , e uma reta ℓ tal que $A \notin \ell$, $B \notin \ell$ e $C \notin \ell$, se ℓ contém um ponto entre A e B , então ℓ contém um ponto entre A e C ou contém um ponto entre B e C , mas essas duas possibilidades não ocorrem simultaneamente.

O axioma (O-1) garante que a relação “estar entre” é simétrica, ou seja, para decidir se um ponto está entre outros dois, é irrelevante qual desses dois pontos está à direita ou à esquerda.

O axioma (O-2) garante a “densidade” dos pontos em uma reta, ou seja, garante que entre dois pontos de uma reta sempre há um terceiro ponto, logo, uma infinidade de pontos. Intuitivamente, ele também garante que é possível estender uma reta “indefinidamente”, nos dois sentidos.

O axioma (O-3) estabelece que uma reta não pode ser uma curva fechada, como um círculo por exemplo.

O axioma (O-4), surgiu em 1882, no trabalho do matemático alemão Moritz Pasch (1843-1930). Pasch foi pioneiro na abordagem moderna da geometria, que se ocupa em desenvolvê-la a partir de axiomas, sem a tentativa de interpretar fisicamente as noções primitivas. O axioma de Pasch afirma que, se uma reta não passa pelos vértices de um triângulo e cruza um de seus lados, então ela também cruza exatamente um de seus outros dois lados (veja a figura 1).

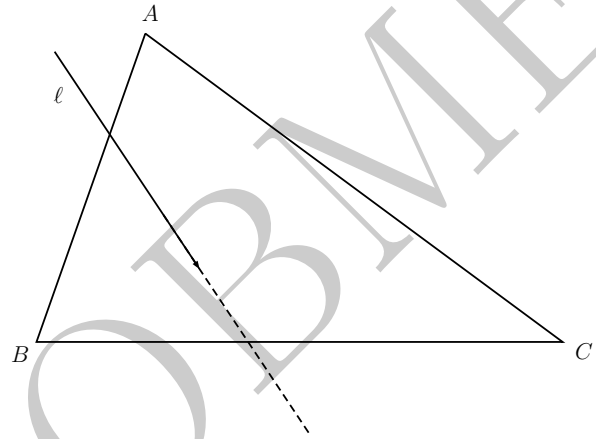


Figura 1: axioma de Pasch.

Com os axiomas de ordem podemos definir o **segmento** AB , para $A \neq B$, como sendo o conjunto dos pontos C , situados sobre a reta determinada por A e B e tais que $C = A$, $C = B$ ou $A * C * B$ (i.e., C está entre A e B).

A seguir, utilizamos os axiomas de ordem para estabelecer a noção de *semiespaço*, que é o objetivo desta seção.

Teorema 1. *Todo plano α divide o espaço em dois subconjuntos, chamados semiespaços, os quais têm as seguintes propriedades:*

- (a) Se dois pontos P e Q estão em um mesmo semiespaço, então $PQ \cap \alpha = \emptyset$.
- (b) Se P e Q estão em semiespaços distintos, então $PQ \cap \alpha \neq \emptyset$.

Prova. Seja A um ponto do espaço que não pertence ao plano α . Sua existência é garantida pelo axioma (E-4) (veja a parte 1). Consideremos os dois conjuntos abaixo:

$$S_1 = \{X \mid X \notin \alpha \text{ e o segmento } AX \text{ intersecta } \alpha\},$$

$$S_2 = \{X \mid X \notin \alpha \text{ e o segmento } AX \text{ não intersecta } \alpha\} \cup \{A\}.$$

Claramente, a união $S_1 \cup S_2 \cup \alpha$ esgota todos os pontos do espaço. Além disso, dado um ponto $O \in \alpha$, consideremos a reta AO que passa por A e por O . O axioma (O-2) garante que existem pontos B e C tais que $A * O * B$ e $A * C * O$.

Assim, $B \in S_1$ e $C \in S_2$, o que implica que $S_1 \neq \emptyset$ e $S_2 \neq \emptyset$.

Devemos observar também que, de acordo com a definição de S_2 , o ponto A pertence a S_2 . Além disso, é claro que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

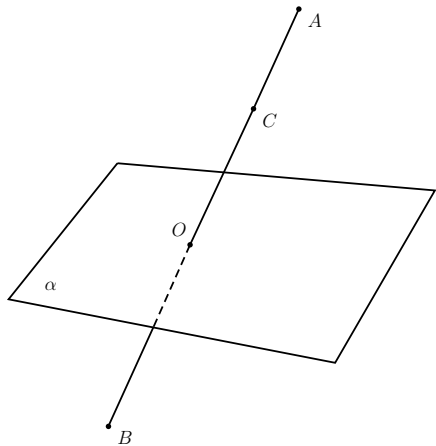


Figura 2: plano dividindo o espaço em dois semiespaços.

Agora, dados P e Q em S_2 , vamos mostrar que $PQ \cap \alpha = \emptyset$. Observe que, pela definição de S_2 , o fato de $P \in S_2$ implica $PA \cap \alpha = \emptyset$; da mesma forma, $Q \in S_2$ implica $AQ \cap \alpha = \emptyset$. Analisemos dois casos separadamente:

(i) Se A, P e Q são colineares, há os três subcasos a seguir:

- Se $P * A * Q$, então $PQ = PA \cup AQ$.
- Se $P * Q * A$, então $PQ \subset PA$.
- Se $A * P * Q$, então $PQ \subset AQ$ (veja o axioma (O-3)).

No primeiro subcaso, as igualdades $PA \cap \alpha = \emptyset$ e $AQ \cap \alpha = \emptyset$ implicam

$$PQ \cap \alpha = (PA \cup AQ) \cap \alpha = \emptyset.$$

No segundo subcaso, $PA \cap \alpha = \emptyset$ e $PQ \subset PA$ implicam $PQ \cap \alpha = \emptyset$. Finalmente, no terceiro subcaso, $AQ \cap \alpha = \emptyset$ e $PQ \subset AQ$ implicam $PQ \cap \alpha = \emptyset$.

(ii) Suponha, agora, que A, P e Q não são colineares. Seja β o plano determinado por A, P e Q , e consideremos separadamente os subcasos $\beta \parallel \alpha$ e $\beta \not\parallel \alpha$.

Se $\beta \parallel \alpha$, então $PQ \subset \beta$ implica $PQ \cap \alpha = \emptyset$, conforme desejado. Se $\beta \not\parallel \alpha$, então sabemos que $\alpha \cap \beta = t$, uma reta. Suponhamos, por absurdo, que $PQ \cap \alpha = \{X\}$. Então,

$$X \in PQ \cap \alpha \subset \beta \cap \alpha = t,$$

de sorte que $X \in PQ \cap t$ e, por conseguinte, $PQ \cap t \neq \emptyset$. Como $A, P, Q \notin \alpha$, a reta t (que está contida em α) não

passa por vértice algum do triângulo APQ . Isso, juntamente com o fato de $PQ \cap t \neq \emptyset$, garante que o Axioma de Pasch se aplica para garantir que

$$AP \cap t \neq \emptyset \text{ ou } AQ \cap t \neq \emptyset.$$

Por sua vez, as relações acima significam respectivamente que

$$AP \cap \alpha \neq \emptyset \text{ ou } AQ \cap \alpha \neq \emptyset,$$

o que é o mesmo que $P \in S_1$ ou $Q \in S_1$. Mas, como $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, segue daí que $P \notin S_2$ ou $Q \notin S_2$, o que contraria as hipóteses. Tal contradição mostra que deve ser $PQ \cap \alpha = \emptyset$.

É, ainda, necessário mostrar que:

- Se $P \in S_1$ e $Q \in S_1$, então $PQ \cap \alpha = \emptyset$.
- Se $P \in S_1$ e $Q \in S_2$, então $PQ \cap \alpha \neq \emptyset$.

As demonstrações desses fatos seguem raciocínios análogos aos que utilizamos acima, de forma que as deixaremos a cargo do leitor. \square

2 Construção de pirâmides e prismas

Nesta seção, utilizaremos os resultados já estabelecidos nas partes 1 e 2 para construir duas classes importantes de sólidos: as *pirâmides* e os *prismas*. Uma vez que a definição de tais sólidos utilizará o conceito de *polígono convexo*, começamos recordando o que vem a ser um tal objeto.

Considere um polígono plano $A_1 A_2 \dots A_n$, onde $n \geq 3$ é um número natural (veja a figura 3).

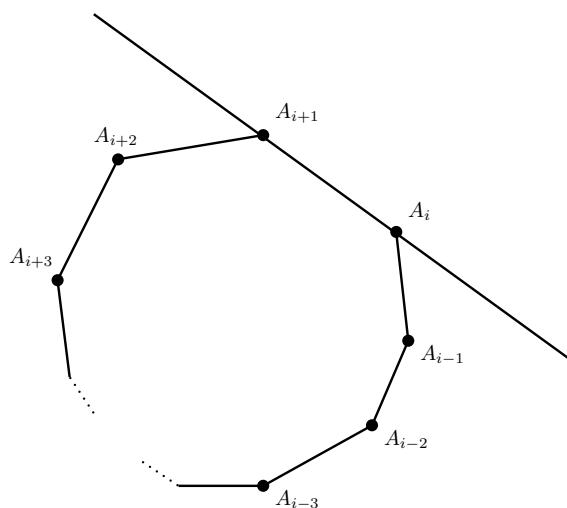


Figura 3: um polígono convexo.

Os pontos A_i , para $1 \leq i \leq n$, são os **vértices** do polígono. Seja α o plano que contém o polígono. Para cada inteiro $1 \leq i \leq n$, a reta que passa pelos vértices A_i e A_{i+1} (aqui, convencionamos que, se $i = n$, então $A_{n+1} = A_1$) determina, em α , dois semiplanos S_i^- e S_i^+ , tais que $\alpha = S_i^- \cup S_i^+$.

Se, para cada inteiro $1 \leq i \leq n$, os vértices do polígono diferentes de A_i e A_{i+1} pertencerem todos a S_i^+ ou todos a S_i^- , diremos que o polígono $A_1A_2 \dots A_n$ é **convexo**.

Sejam α um plano e $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) um polígono convexo contido em α . Como antes, sempre que for necessário referirmo-nos ao lado A_iA_{i+1} do polígono, convencionamos $A_{n+1} = A_1$, de maneira que $A_nA_{n+1} = A_nA_1$.

Pelo axioma (E-4), existe um ponto $V \notin \alpha$. A seguir, iremos construir a **pirâmide** de **base** $A_1A_2 \dots A_n$ e **vértice** V (veja a Figura 4). Dados dois vértices consecutivos A_iA_{i+1} , com $1 \leq i \leq n$, o triângulo $A_iA_{i+1}V$ está contido em um plano β_i . Temos $\beta_i \neq \alpha$, uma vez que $V \notin \alpha$. Além disso, se $i \neq j$, afirmamos que $\beta_i \neq \beta_j$. De fato, se $j < i$ (o caso $i < j$ pode ser tratado de modo análogo), então A_j , A_i e A_{i+1} seriam três pontos distintos e não colineares¹ em α , e também em $\beta_i = \beta_j$. Pelo axioma (E-3), teríamos $\beta_i = \alpha$, de sorte que $V \in \beta_i = \alpha$, o que não ocorre pela escolha de V . Tal contradição garante que, realmente, não podemos ter $\beta_i = \beta_j$.

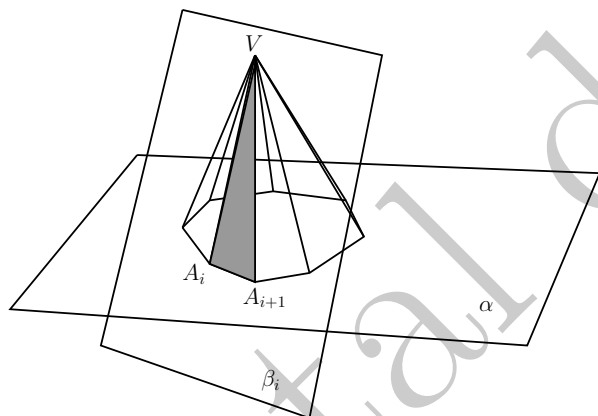


Figura 4: construindo uma pirâmide.

Seja (pelo Teorema 1) E_0 o semiespaço determinado por α e contendo o ponto V . Para cada inteiro $1 \leq i \leq n$, seja E_i o semiespaço determinado pelo plano β_i e que contém pelo menos um vértice A_j , com $j \notin \{i, i+1\}$. Não é difícil mostrar (faça isso!) que, de fato, β_i contém todos o polígono $A_1A_2 \dots A_n$. A **pirâmide** P de base $A_1A_2 \dots A_n$ e vértice V é a região do espaço obtida como interseção dos

¹A não colinearidade desses três pontos decorre da convexidade do polígono $A_1A_2 \dots A_n$. Verifique isso!

semiespaços E_0, E_1, \dots, E_n :

$$P = \bigcap_{i=0}^n E_i.$$

O polígono $A_1A_2 \dots A_n$ é a **base** de P . Para $1 \leq i \leq n$, os segmentos A_iA_{i+1} e VA_i são as **arestas** de P . Também para $1 \leq i \leq n$, os triângulos $A_iA_{i+1}V$, são as **faces laterais** da pirâmide P , razão pela qual os segmentos VA_i são frequentemente denominados de **arestas laterais** da pirâmide.

Por vezes usamos, por abuso de linguagem, a palavra pirâmide para indicar a superfície que delimita a região P do espaço. As pirâmides são exemplos de sólidos mais gerais, chamados *poliedros*, os quais serão estudados mais adiante.

Classificamos as pirâmides conforme o número de lados de sua base. Assim, se a base da pirâmide for um triângulo, ou um quadrilátero, ou um pentágono, etc., diremos que a pirâmide é **triangular**, ou **quadrangular**, ou **pentagonal**, etc., respectivamente. Uma pirâmide triangular também é chamada de **tetraedro**. Em geral, se a base de uma pirâmide for um polígono $A_1A_2 \dots A_n$, diremos que se trata de uma pirâmide **n-gonal**.

Consideremos, agora, um polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$ contido em um plano α , e um ponto $B_1 \notin \alpha$. Pelo Teorema 14 da parte 1, existe um único plano β , paralelo ao plano α e passando pelo ponto B_1 . Fixemos a reta $\ell_1 = A_1B_1$ (veja a Figura 5). Por cada ponto A_i , com $1 < i \leq n$, considere a única reta ℓ_i , passando por A_i e paralela a ℓ_1 .

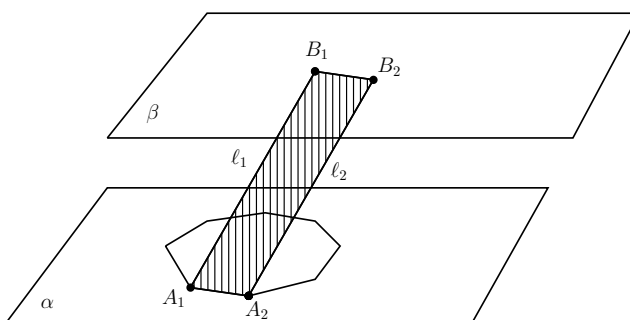


Figura 5: construindo um prisma.

Para cada inteiro $1 < i \leq n$, a reta ℓ_i intersecta o plano β . De fato, se ℓ_i fosse paralela ao plano β , então (cf. Teorema 10 da parte 1) ℓ_i seria paralela a uma reta t contida em β . Então, pelo Teorema 7 da parte 1, $\ell_1 \parallel \ell_i$ e $\ell_i \parallel t$ implicariam $\ell_1 \parallel t$ e, portanto (novamente o Teorema 10 da parte 1), $\ell_1 \parallel \beta$. Mas ℓ_1 não é paralela ao plano β , de forma que ℓ_i não pode ser paralela ao plano β .

Para cada inteiro $1 < i \leq n$, seja B_i o ponto de interseção entre ℓ_i e o plano β . Como antes, convencionemos

que $A_{n+1} = A_1$ e $B_{n+1} = B_1$. Para $1 \leq i \leq n$, afirmamos que o quadrilátero $A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$ é um paralelogramo. De fato (veja novamente a Figura 5), a reta determinada por $A_i B_i$ é ℓ_i e a reta determinada por $A_{i+1} B_{i+1}$ é ℓ_{i+1} . Como $\ell_i \parallel \ell_1$ e $\ell_{i+1} \parallel \ell_1$ por construção, temos (uma vez mais pelo Teorema 7 da parte 1) que $\ell_i \parallel \ell_{i+1}$. Por outro lado, sejam r_i a reta determinada por A_i e A_{i+1} , e s_i a reta determinada por B_i e B_{i+1} . Essas retas são coplanares, pois estão contidas no plano determinado por ℓ_i e ℓ_{i+1} . Se elas tivessem um ponto em comum, tal ponto pertenceria à interseção dos planos α e β , os quais são paralelos. Assim, as retas r_i e s_i são paralelas, e o quadrilátero $A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$ (por ter pares de lados opostos paralelos) é um paralelogramo, para cada $1 \leq i \leq n$.

Consideremos, agora, alguns semiespaços determinados pela construção acima. Primeiramente, sejam E^+ o semiespaço determinado pelo plano α e que contém B_1 , e E^- o semiespaço determinado por β e que contém A_1 ; em seguida, para cada inteiro $1 \leq i \leq n$, seja E_i o semiespaço determinado pelo plano do paralelogramo $A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$ e que contém algum ponto A_j , com $j \neq i, i+1$. Como antes, não é difícil mostrar que os semiespaços E^+ , E^- e todos os semiespaços E_i contém todos os segmentos $A_i B_i$. Isto posto, a interseção

$$R = E^- \cap E^+ \cap \bigcap_{i=1}^n E_i,$$

de todos esses semiespaços é uma região do espaço chamada **prisma**. Os polígonos $A_1 A_2 \dots A_n$ e $B_1 B_2 \dots B_n$ são chamados **bases** do prisma. Os paralelogramos $A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$, para $1 \leq i \leq n$, são chamados **faces laterais** do prisma. Assim como as pirâmides, os prismas são caracterizados de acordo com os números de lados de suas bases: se o polígono $A_1 A_2 \dots A_n$ for um triângulo, ou um quadrilátero, ou um pentágono, etc., então o prisma correspondente é chamado prisma **triangular**, ou **quadrangular**, ou **pentagonal**, etc., respectivamente. Mais geralmente, se as bases de um prisma são polígonos de n lados, dizemos que tal prisma é **n-gonal**.

3 Alguns problemas adicionais

A seguir, apresentamos alguns exemplos que ilustram o que foi visto nas seções anteriores desta parte, bem como nas partes 1 e 2.

Começemos observando que, em todo tetraedro, as arestas que não têm pontos em comum são chamadas **arestas opostas**, e que todo tetraedro tem exatamente três pares de arestas opostas. Na Figura 6, tais pares de arestas opostas estão destacados em azul, verde e vermelho.

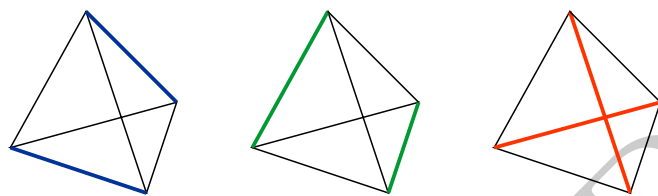


Figura 6: os pares de arestas opostas em um tetraedro.

Exemplo 2. Em todo tetraedro, mostre que os segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas são concorrentes.

Solução. Sejam $ABCD$ um tetraedro qualquer e L, M, N, P, Q e R os pontos médios de suas arestas, conforme mostrado à Figura 7, à esquerda. Na mesma figura, à direita, destacamos o quadrilátero reverso $ABDC$.

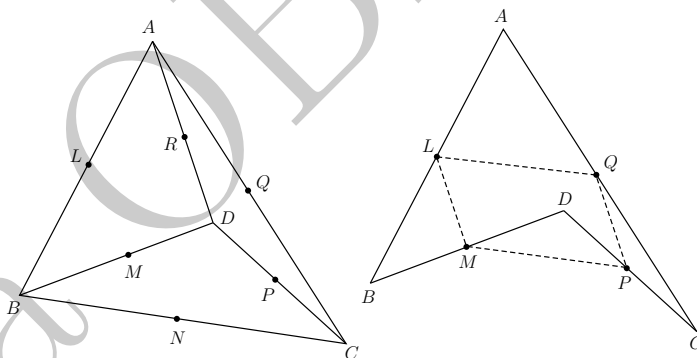


Figura 7: $LMPQ$ é um paralelogramo.

De acordo com o Exemplo 11 da parte 1, os pontos médios das arestas desse quadrilátero reverso formam um paralelogramo $LMPQ$, que aparece com lados tracejados à direita, na Figura 7.

A Geometria Euclidiana Plana ensina que as diagonais de um paralelogramo intersectam-se em seus respectivos pontos médios. Dessa forma, os segmentos LP e MQ intersectam-se nos pontos médios de ambos.

De modo análogo, os pontos médios dos lados dos quadriláteros reversos $ABCD$ e $ADBC$ (veja a Figura 8) são vértices de paralelogramos. Assim, as diagonais LP e NR intersectam-se em seus respectivos pontos médios, o mesmo ocorrendo com as diagonais MQ e NR .

Com isso, podemos concluir que os segmentos LP , MQ e NR encontram-se em um mesmo ponto, que é o ponto médio de cada segmento.

□

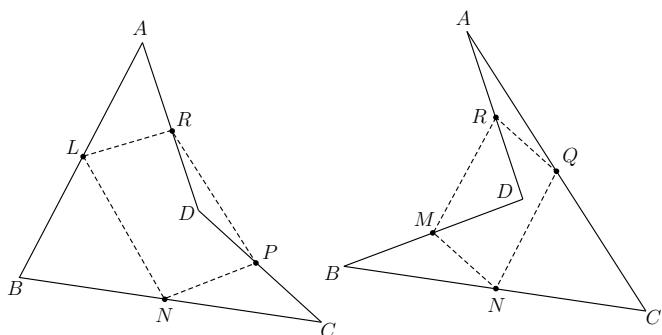


Figura 8: os quadriláteros reversos $ABCD$ e $ADBC$.

Exemplo 3. Dadas no espaço duas retas reversas, mostre que existe um único par de planos paralelos, cada um contendo uma das retas.

Prova. Sejam r e s retas reversas dadas, A um ponto qualquer de s e B um ponto qualquer de r (cf. Figura 9).

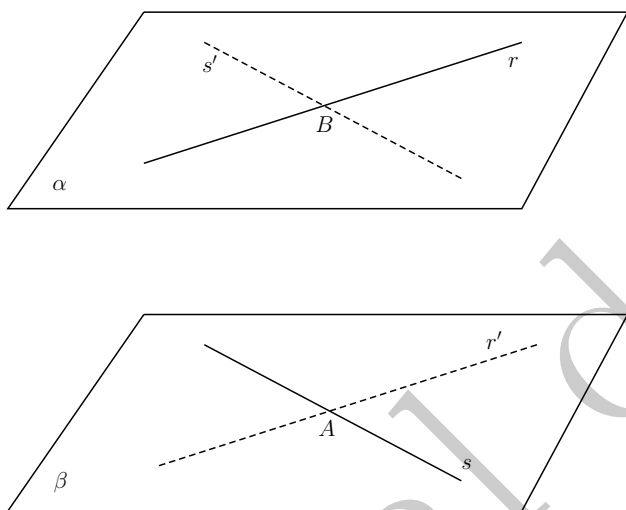


Figura 9: retas reversas em planos paralelos.

No plano determinado por r e A , existe uma única reta r' , passando por A e paralela a r . Da mesma forma, no plano determinado por s e B , existe uma única reta s' , passando por B e paralela a s .

As retas r e s' , concorrentes em B , determinam um plano α que contém r , assim como as retas r' e s , concorrentes em A , determinam um plano β que contém s . Pelo Teorema 13 da parte 1, os planos α e β são paralelos.

Deixamos a parte de unicidade como exercício para o leitor. \square

Observação 4. Graças ao exemplo anterior, podemos definir a **distância** entre duas retas reversas como sendo igual à distância entre os planos paralelos que as contêm. Nas

notações da demonstração do exemplo anterior, com um pouco mais de trabalho (veja a referência [1], por exemplo) pode ser mostrado que existem únicos pontos $X \in r$ e $Y \in s$ tais que $\overleftrightarrow{XY} \perp \alpha, \beta$. Em particular, \overline{XY} é exatamente a distância entre r e s .

Exemplo 5. Calcule a distância entre duas arestas opostas de um tetraedro regular, em termos do comprimento de suas arestas.

Solução. Sejam $ABCD$ um tetraedro regular de arestas iguais a ℓ , e AB e CD duas arestas opostas do mesmo (cf. Figura 10).

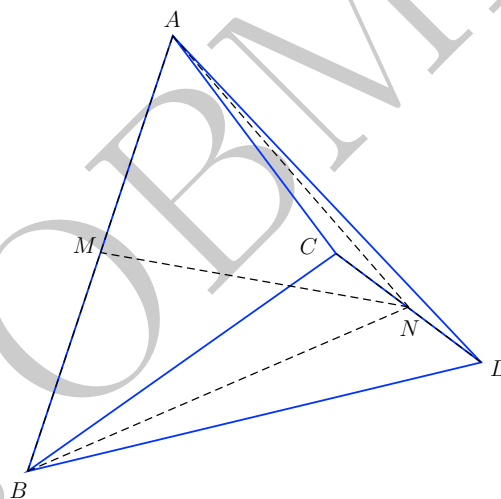


Figura 10: distância entre arestas opostas de um tetraedro regular.

Sejam M e N os pontos médios de AB e CD , respectivamente. Como as faces de $ABCD$ são triângulos equiláteros, temos $\overline{AN} = \overline{BM} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Então, o triângulo ANB é isósceles de base AB de forma que sua mediana MN também é altura relativa à base. Portanto, $MN \perp AB$.

Um raciocínio análogo ao do parágrafo anterior permite concluir que $MN \perp CD$, de sorte que, pela observação anterior, a distância desejada é igual a $d = \overline{MN}$.

A fim de calcular d , apliquemos o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AMN . Como $\overline{AN} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e $\overline{AM} = \frac{\ell}{2}$, temos

$$d^2 = \overline{MN}^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{2},$$

de maneira que

$$d = \frac{\ell}{\sqrt{2}}.$$

\square

Dicas para o Professor

Assim como nas partes 1 e 2, o texto pode ser abordado de dois modos distintos. Primeiramente, caso você o siga à risca, fazendo todas as construções e demonstrações, deve precisar de aproximadamente 4 aulas de 50 minutos cada para cobri-lo. Outra opção é exibir os resultados das seções 1 e 2 sem entrar em detalhes sobre as demonstrações, e concentrar seus esforços na seção 3; nesse caso, no máximo 3 aulas serão suficientes.

O material da seção Seção 1 já poderia ter sido visto na parte 1, logo após a primeira seção daquela parte. Todavia, como ele trata de questões mais delicadas e recorre aos axiomas de ordem, preferi colocá-lo nesta parte final, quando o aluno já deve ter tido um contato maior com o método axiomático. Caso a opção do professor tenha sido por não seguir o texto à risca, omitindo as demonstrações, a seção 1 desta parte pode ser resumida apenas à apresentação do Teorema 1 e a uma discussão breve sobre os axiomas de ordem.

Mesmo que as construções da seção 2 não sejam vistas com todos os detalhes, é interessante que os alunos saibam que objetos como pirâmides ou prismas podem ser construídos rigorosamente.

Os axiomas de Hilbert podem ser encontrados nas referências [3], [5] ou [8], bem como no trabalho original de Hilbert, [7]. Para versões diferentes dos axiomas, consulte [4] ou [6]. Na seção 4.1 de [5] os axiomas de ordem são apresentados de modo um pouco diferente. Lá, por exemplo, o axioma de Pasch é um teorema. A referência [8] apresenta a visão ampla e fascinante de um matemático notável sobre o assunto. A nossa notação para a relação “está entre” foi retirada de lá.

O presente texto, dividido em três partes, não tem a pretensão de ser um compêndio sobre o tratamento axiomático da geometria. Tudo que foi exposto aqui pode ser visto de modo mais amplo e aprofundado nas sugestões de leitura complementar.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2014.
2. H. B. Griffiths e P. J. Hilton. *Matemática Clássica, uma Interpretação Contemporânea*, vol. 2. São Paulo, Editora Edgard Blücher, USP, 1975.
3. B. Castrucci. *Fundamentos da Geometria, Estudo axiomático do plano euclidiano*. Rio de Janeiro, LTC, 1978.
4. J. L. M. Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2006.
5. E. Moise. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Reading, Addison-Wesley, 1963.
6. A. Pogorelov. *Geometry*. Moscou, Editora Mir, 1987.

7. D. Hilbert. *Fundamentos da Geometria*, tradução da sétima edição do original alemão. Lisboa, Editora Gradiva, 2003.
8. R. Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*. Nova Iorque, Editora Springer-Verlag, 2000.