

# Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivadas de Funções Trigonométricas

## Exercícios - Parte IV

### Tópicos Adicionais

**Autor: Tiago Caúla Ribeiro**  
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**10 de Novembro de 2024**



**PORTAL DA  
MATEMÁTICA**  
OBMEP

Encerraremos esse módulo solucionando mais alguns problemas envolvendo o cálculo diferencial de funções trigonométricas.

## 1 Exemplos

**Exemplo 1** (OIMU - 2013). *Uma função real  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e diferenciável. Além disso, satisfaz a relação*

$$f(x)f'(x) \geq \operatorname{sen} x. \quad (1)$$

*Existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ?*

**Solução.** Não. Com efeito, a desigualdade (1) significa que a função  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , de regra  $g(x) = f(x)^2 + 2 \cos x$ , é monótona não decrescente, pois

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x) - 2 \operatorname{sen} x \\ &= 2(f'(x)f(x) - \operatorname{sen} x) \geq 0, \end{aligned}$$

para cada número não negativo  $x$ . Como  $g$  é limitada, sendo uma soma de funções limitadas, a observação 10 da aula *Limites Laterais*, do módulo *Leis do limites - Parte 2*, garante a existência de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . Portanto, se existisse  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , as regras aritméticas para limites implicariam a existência de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) - f(x)^2}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x,$$

o que não é verdade. □

**Exemplo 2.** *Para cada  $x \in (0, 1)$ , verifique a desigualdade*

$$\operatorname{sen} \pi x > \pi x(1 - x).$$

**Prova.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} \pi x - \pi x(1 - x).$$

Note que o gráfico de  $f$  é simétrico em relação à reta vertical  $x = 1/2$ , ou seja, vale  $f(1-x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Com efeito, lembrando que a função seno assume o mesmo valor em arcos suplementares, vem que

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \text{sen}(\pi - \pi x) - \pi(1-x)[1 - (1-x)] \\ &= \text{sen } \pi x - \pi(1-x)x = f(x). \end{aligned}$$

Então, só precisamos provar que  $f(x) > 0$  para cada  $x \in (0, 1/2]$ .

Para estabelecer essa desigualdade, considere a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \text{sen } \pi x - \pi x(1 - 2x^2).$$

Começamos observando que

$$g(x) \leq f(x), \quad \forall x \in [0, 1/2]. \quad (2)$$

De fato,  $0 \leq x \leq 1/2 \Rightarrow 2x^2 \leq x$ , o que, por sua vez, implica

$$\begin{aligned} g(x) &= \text{sen } \pi x + \pi x(2x^2 - 1) \\ &\leq \text{sen } \pi x + \pi x(x - 1) = f(x), \end{aligned}$$

como desejado. Por outro lado,

$$g'(x) = \pi(\cos \pi x + 6x^2 - 1) \quad \text{e} \quad g''(x) = \pi(-\pi \text{sen } \pi x + 12x).$$

Como  $\pi^2 < 3,2^2 = 10,24 < 12$  e  $\text{sen } \theta < \theta$  para todo  $\theta > 0$ , temos (com  $\theta = \pi x$ )

$$12x - \pi \text{sen } \pi x > \pi(\pi x - \text{sen } \pi x) = \pi(\theta - \text{sen } \theta) > 0.$$

Portanto,  $g'' > 0$  em  $(0, +\infty)$ , o que, com as relações  $g(0) = g'(0) = 0$ , permite concluir, via lema 9 da primeira parte dessa aula, a desigualdade  $g > 0$ , também em  $(0, +\infty)$ . Assim, por (2), temos que

$$0 < x \leq 1/2 \Rightarrow f(x) \geq g(x) > 0,$$

encerrando a solução. □

### Exemplo 3 (OBMU - 2012).

- (a) Determine o maior valor possível de  $|\operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(2x)|$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Prove que, para todo inteiro positivo  $k$ , se  $x = \frac{2\pi r}{2^k - 1}$ , com  $r \in \mathbb{Z}$ , então

$$\left| \prod_{j=0}^{k-1} \operatorname{sen}(2^j x) \right| = |\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(2x) \dots \operatorname{sen}(2^{k-1}x)| \leq \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k.$$

**Solução.** Começamos observando que a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(2x),$$

admite  $\pi$  como período<sup>1</sup>. De fato, atentando à fórmula  $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ , vem que

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= (\operatorname{sen}(x + \pi))^2 \cdot \operatorname{sen}(2(x + \pi)) \\ &= (-\operatorname{sen}(x))^2 \cdot \operatorname{sen}(2x + 2\pi) \\ &= \operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(2x) = f(x). \end{aligned}$$

Assim, para resolver o problema, só precisamos nos ater aos valores  $|\operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(2x)|$  com  $x \in [0, \pi]$ .

Mais ainda, o gráfico de  $f$  é simétrico em relação ao ponto  $(\pi/2, 0)$ , ou seja,  $f(\pi - x) = -f(x)$  para todo  $x$  real. Realmente, usando o fato de  $\pi$  ser um período de  $f$  e notando que  $f$  é uma função ímpar, temos

$$f(\pi - x) = f(-x) = -f(x).$$

Portanto, os valores assumidos por  $|f|$  nos intervalos  $[0, \pi/2]$  e  $[\pi/2, \pi]$  são os mesmos. Como  $|f|_{[0, \pi/2]} = f_{[0, \pi/2]}$ , pois  $\operatorname{sen}$  é não negativa no intervalo  $[0, \pi]$ , estamos, ao final das contas, procurando o valor máximo assumido por  $f$  no intervalo  $[0, \pi/2]$ .

---

<sup>1</sup>Em verdade, como  $f$  é positiva em  $(0, \pi/2)$  e negativa em  $(\pi/2, \pi)$ , não é difícil concluir que  $\pi$  é o período de  $f$ .

Derivando  $f$ , obtém-se

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2(\operatorname{sen}(x) \cos(x) \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}^2(x) \cos(2x)) \\&= 2 \operatorname{sen}^2(x)(2 \cos^2(x) + \cos(2x)) \\&= 2 \operatorname{sen}^2(x)(4 \cos^2(x) - 1) \\&= 2 \operatorname{sen}^2(x)(2 \cos(x) + 1)(2 \cos(x) - 1),\end{aligned}$$

sendo que as fórmulas  $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$  e  $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$  foram utilizadas na 2ª e 3ª igualdades, respectivamente.

Como a expressão  $2 \cos x - 1$  é positiva no intervalo  $(0, \pi/3)$  e negativa no intervalo  $(\pi/3, \pi/2)$ , segue que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < x < \pi/3 \\ < 0, & \text{se } \pi/3 < x < \pi/2 \end{cases}.$$

Pelo teste da 1ª derivada,  $x = \pi/3$  é ponto de máximo (estrito) de  $f$  restrita ao intervalo  $[0, \pi/2]$ .

Desse modo,

$$f(\pi/3) = \operatorname{sen}^2(\pi/3) \cdot \operatorname{sen}(2\pi/3) = (\sqrt{3}/2)^3$$

é o valor máximo de  $|\operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(2x)|$  quando  $x$  varia em  $\mathbb{R}$ .

Quanto ao item (b), primeiro note que  $\operatorname{sen}(2^k x) = \operatorname{sen}(x)$ . Com efeito, sendo  $(2^k - 1)x = 2\pi r$ , com  $r \in \mathbb{Z}$ , seguem as igualdades

$$\operatorname{sen}(2^k x) = \operatorname{sen}((2^k - 1)x + x) = \operatorname{sen}(2\pi r + x) = \operatorname{sen} x,$$

como queríamos.

Portanto, usando o item (a), podemos escrever as  $k$  desigualdades

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(2x)| &\leq (\sqrt{3}/2)^3 \\|\operatorname{sen}^2(2x) \cdot \operatorname{sen}(4x)| &\leq (\sqrt{3}/2)^3 \\&\vdots \\|\operatorname{sen}^2(2^{k-2}x) \cdot \operatorname{sen}(2^{k-1}x)| &\leq (\sqrt{3}/2)^3 \\|\operatorname{sen}^2(2^{k-1}x) \cdot \operatorname{sen}(x)| &\leq (\sqrt{3}/2)^3.\end{aligned}$$

Percorrendo os primeiros membros das relações acima, vemos que cada fator da forma  $\text{sen}(2^j x)$ , com  $0 \leq j \leq k-1$ , se repete exatamente três vezes. Daí, multiplicando tais desigualdades membro a membro, obtemos

$$\left| \prod_{j=0}^{k-1} \text{sen}(2^j x) \right|^3 \leq [(\sqrt{3}/2)^3]^k = [(\sqrt{3}/2)^k]^3,$$

o que, pela extração da raiz cúbica, fornece a desigualdade desejada.  $\square$

Para o próximo exemplo, recorde que, na aula *O Teorema do Sanduíche*, do módulo *Leis do Limite - Parte 1*, estabelecemos o *limite trigonométrico fundamental*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1. \quad (3)$$

Já no exemplo 3 – (a) dessa mesma aula, apresentamos um outro limite,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad (4)$$

o qual implica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \quad (5)$$

**Exemplo 4.** Considere a função  $f : (0, 2\pi) \setminus \{\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \cotg x + \text{cossec } x.$$

Mostre que é possível definir o valor  $f(\pi)$  de tal modo que a função resultante  $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  seja continuamente derivável (i.e., tal que  $f$  seja derivável e  $f'$  seja contínua).

**Solução.** O único valor possível para  $f(\pi)$ , o qual venha a tornar  $f$  contínua em  $\pi$ , é

$$f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x),$$

caso o limite exista e seja finito.

Observando que  $f(x) = (\cos x + 1)/\operatorname{sen} x$  e escrevendo  $x = \theta + \pi$ , as relações  $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen} \theta$  e  $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$  dão

$$f(x) = \frac{\cos(\theta + \pi) + 1}{\operatorname{sen}(\theta + \pi)} = \frac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\frac{\cos \theta - 1}{\theta}}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}}.$$

Portanto, (3) e (5) dão

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{\cos \theta - 1}{\theta}}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}} \right) = \frac{\cos'(0)}{\operatorname{sen}'(0)} = 0.$$

O cálculo acima mostra que, pondo  $f(\pi) = 0$ , a função estendida  $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Afirmamos que essa extensão é derivável.

Naturalmente, se  $x \in (0, 2\pi)$  e  $x \neq \pi$ , então  $f$  é derivável em  $x$ , valendo

$$f'(x) = -(\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cdot \cotg x). \quad (6)$$

Para estabelecer a existência de  $f'(\pi)$ , comecemos calculando o quociente de Newton de  $f$  em  $\pi$ , com o auxílio do cálculo de  $f(x) = f(\theta + \pi)$ , feito acima:

$$\frac{f(\theta + \pi) - f(\pi)}{\theta} = \frac{f(\theta + \pi)}{\theta} = \frac{\frac{\cos \theta - 1}{\theta^2}}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}}.$$

Portanto, segue de (3) e (4) que

$$f'(\pi) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \pi) - f(\pi)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos \theta - 1}{\theta^2}}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}} = -1/2,$$

e  $f$  é derivável em  $\pi$ .

Para finalizar, é preciso provar que  $f' : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Pela fórmula (6), é claro que  $f'$  é contínua em cada  $x \neq \pi$ . Portanto, a solução estará encerrada se mostrarmos

que o limite de  $f'$  em  $\pi$  existe e é igual a  $f'(\pi)$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} f'(x) &= - \lim_{x \rightarrow \pi} (\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cdot \cotg x) \\ &= - \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\theta + \pi)}{\operatorname{sen}^2(\theta + \pi)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos \theta - 1}{\theta^2}}{\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}\right)^2} \\ &= \frac{-1/2}{1^2} = f'(\pi).\end{aligned}$$

□

**Exemplo 5.** *Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reais e  $k_1, k_2, \dots, k_n$  números reais positivos e dois a dois distintos. Se*

$$\sum_{j=1}^n a_j \cos k_j x = 0 \quad (7)$$

para todo real  $x$ , mostre que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

**Solução.** Fazemos uma demonstração por indução, sendo a base,  $n = 1$ , de fácil verificação. Supondo o enunciado verdadeiro para um certo natural  $n$ , tomemos números reais  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  e números reais positivos  $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ , dois a dois distintos, tais que

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j \cos k_j x = 0 \quad (8)$$

para todo real  $x$ . Derivando duas vezes o 1º membro da relação (8), obtemos

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j k_j^2 \cos k_j x = 0.$$

Subtraindo da relação acima a igualdade (8) multiplicada por  $k_1^2$ , vem que

$$a_2(k_2^2 - k_1^2) \cos k_2 x + \dots + a_{n+1}(k_{n+1}^2 - k_1^2) \cos k_{n+1} x = 0$$



para cada  $x$ .

Pela hipótese de indução aplicada as  $n$ -uplas  $(a_j(k_j^2 - k_1^2))_{2 \leq j \leq n+1}$  e  $(k_j)_{2 \leq j \leq n+1}$ , segue que  $a_j(k_j^2 - k_1^2) = 0$  para todo  $j \in \{2, \dots, n+1\}$ . Como  $j > 1 \Rightarrow k_j^2 \neq k_1^2$ , concluímos que  $a_j = 0$  se  $j = 2, \dots, n+1$ .

Retornando à relação (8), vemos que  $a_1 \cos k_1 x = 0$  para todo  $x$ , o que implica  $a_1 = 0$ , estabelecendo o passo de indução e encerrando a solução.  $\square$

Para acompanhar a solução do último exemplo, convém observar alguns pontos.

- I. As sucessivas derivadas da função  $\sin$  (ou  $\cos$ ) constituem uma sequência periódica de período 4. Reveja a proposição 2 da 1ª parte dessa aula.
- II. Se a matriz de um sistema linear  $n \times n$  tiver determinante não nulo, então o sistema será possível e determinado. Esse resultado compõe a chamada *regra de Cramer*, tema da seção 95 da referência [2]. Em particular, se o sistema for homogêneo (isto é, se a coluna dos termos independentes for nula), a hipótese de não anulamento do determinante da matriz do sistema implica que  $(0, 0, \dots, 0)$ , a *solução trivial*, é a única solução.
- III. Se um determinante  $n \times n$  for tal que os termos de cada coluna constituem, ordenadamente, uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1, então esse determinante será não nulo se, e somente se, as  $n$  razões dessas PG's forem todas distintas. Um determinante cujas colunas formam PG's iniciadas por 1 é dito de *Vandermonde*. Seu cálculo é deduzido na seção 86 da referência [2].
- IV. Se  $S$  for um conjunto finito e não vazio de números inteiros, não todos nulos, o máximo divisor comum  $d$  dos elementos de  $S$  pode ser escrito como uma combinação linear desses elementos, ou seja, para cada inteiro  $k \in S$

existe um inteiro  $m_k$  de modo que

$$d = \sum_{k \in S} km_k.$$

Por exemplo, se  $S = \{4, 6, 10\}$ , então  $d = \text{mdc}(4, 6, 10) = 2$  e, daí,

$$d = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot (-1).$$

(Nesse caso, nas notações introduzidas acima, temos  $m_4 = 0, m_6 = 2$  e  $m_{10} = -1$ .) Esse é o *teorema de Bézout*, apresentado, para o caso em que  $S$  tem dois elementos, no teorema 4 da aula *Relação de Bézout e Aplicações*, do módulo *Algoritmo de Euclides Estendido, Relações de Bézout e Equações Diofantinas*. A versão geral desse resultado pode ser encontrada, por exemplo, no teorema 13 do 1º capítulo da referência [3].

**Exemplo 6** (OBMU - 2007). *Dados números reais  $a_1, a_2, \dots, a_n$  não todos nulos, encontre o (menor) período da função*

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kx.$$

**Solução.** Afirmamos que  $f$  tem período igual a  $2\pi/d$ , sendo  $d$  o mdc dos índices  $k$  tais que  $a_k \neq 0$ . De fato, como a função cosseno tem período  $2\pi$ ,

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi/d) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} a_k \cos(kx + 2(k/d)\pi) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \cos kx = f(x), \end{aligned}$$

ou seja,  $2\pi/d$  é um período de  $f$ .

Para encerrar, precisamos mostrar que nenhum real  $T$ , positivo e menor que  $2\pi/d$ , pode ser um período de  $f$ . Com efeito, suponhamos o contrário e seja  $T \in (0, 2\pi/d)$  um

período de  $f$ . Observando que  $\cos^{(2j-1)} = (-1)^j \text{sen}$  (graças à observação I acima), obtemos

$$f^{(2j-1)}(x) = (-1)^j (a_1 \text{sen } x + 2^{2j-1} a_2 \text{sen } 2x + \dots + n^{2j-1} a_n \text{sen } nx).$$

Derivando  $2j - 1$  vezes a relação  $f(x + T) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , segue que  $f^{(2j-1)}(x + T) = f^{(2j-1)}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $f^{(2j-1)}(T) = f^{(2j-1)}(0) = 0$ , ou seja,

$$a_1 \text{sen } T + 2^{2j-1} a_2 \text{sen } 2T + \dots + n^{2j-1} a_n \text{sen } nT = 0,$$

para todo  $j$  natural. Fazendo  $j = 1, 2, \dots, n$ , obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_1 \text{sen } T + 2a_2 \text{sen } 2T + \dots + na_n \text{sen } nT & = 0 \\ a_1 \text{sen } T + 2^3 a_2 \text{sen } 2T + \dots + n^3 a_n \text{sen } nT & = 0 \\ & \vdots \\ a_1 \text{sen } T + 2^{2n-1} a_2 \text{sen } 2T + \dots + n^{2n-1} a_n \text{sen } nT & = 0 \end{cases},$$

o qual pode ser escrito em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1^1 & 2^1 & \dots & n^1 \\ 1^3 & 2^3 & \dots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2n-1} & 2^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \text{sen } T \\ a_2 \text{sen } 2T \\ \vdots \\ a_n \text{sen } nT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que a matriz do sistema anterior tem determinante não nulo. Admitindo essa afirmação por enquanto, segue da regra de Cramer que a matriz coluna à esquerda da igualdade matricial acima deve ser nula (graças à observação II), ou seja, temos  $a_k \text{sen } kT = 0$  para todo  $k$  de 1 a  $n$ . Daí, conclui-se que  $\text{sen } kT = 0$  sempre que  $a_k \neq 0$ . Assim, para tais  $k$ , devemos ter  $kT = l_k \pi$ , sendo  $l_k$  um inteiro.

Todavia, o teorema de Bézout (observação IV) permite escrever  $d = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} km_k$ , para certos inteiros  $m_k$ , de modo

que

$$dT = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} (kT)m_k = \left( \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} l_k m_k \right) \pi = r\pi,$$

sendo  $r = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} l_k m_k$  um inteiro. Note que  $r$  é positivo, já que  $d$  e  $T$  o são. Logo,  $T = \frac{r}{2} \cdot \frac{2\pi}{d}$ , o que implica  $r = 1$ , pois estamos supondo  $T < 2\pi/d$ . Daí,  $\pi/d$  é um período de  $f$ .

Observando que, caso  $d$  divida  $k$ , tem-se

$$\cos(k(x + \pi/d)) = \cos(kx + (k/d)\pi) = \pm \cos kx,$$

em que os sinais  $+$  ou  $-$  são utilizados conforme  $k/d$  seja par ou ímpar, a igualdade  $f(x + \pi/d) = f(x)$  implica

$$\begin{aligned} f(x + \pi/d) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0 \\ k/d \text{ par}}} a_k \cos kx - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0 \\ k/d \text{ ímpar}}} a_k \cos kx \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0 \\ k/d \text{ par}}} a_k \cos kx + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0 \\ k/d \text{ ímpar}}} a_k \cos kx = f(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0 \\ k/d \text{ ímpar}}} a_k \cos kx = 0 \quad (9)$$

para todo real  $x$ . (Note que os números  $k/d$ , para todos os índices  $k$  tais que  $a_k \neq 0$ , são primos entre si, de sorte que pelo menos um deles é ímpar, o que garante a existência do último somatório.)

Porém, o exemplo 5 assegura que a identidade (9) só pode ocorrer se todos os  $a_k$  ali forem iguais a 0, o que é uma contradição. Desse modo, fica provado que  $2\pi/d$  é o período da função  $f$ .

Para o que falta, precisamos verificar que o determinante da matriz  $n \times n$  acima é não nulo. Realmente, essa matriz nada mais é que a matriz de Vandermonde dos números  $1^2, 2^2, \dots, n^2$ , cujo determinante  $D$  é diferente de zero (vide

a observação III), com a  $j$ -ésima coluna multiplicada por  $j$ , para cada  $1 \leq j \leq n$ . Portanto, o determinante procurado é  $n!D \neq 0$ , como desejado.  $\square$

## Dicas para o Professor

Pode ser interessante discutir a seguinte versão mais precisa do exemplo 2 com sua turma: *mostre que, para cada número real  $x$ ,*

$$\text{sen } \pi x \geq \pi x(1 - x),$$

*com igualdade se, e somente se,  $x = 0$  ou  $x = 1$ .*

Pela simetria da função  $f(x) = \text{sen } \pi x - \pi x(1 - x)$  apontada na solução daquele exemplo, falta apenas mostrar que  $f(x) > 0$  para todo  $x < 0$ . Daqui, o leitor poderá completar o argumento observando que  $x < 0$  implica as relações  $1 - x > 1$  e  $-|\text{sen } \pi x| > \pi x$ .

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, vol. 1. 6<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.
2. G. Iezzi, S. Hazzan. *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 4. 8<sup>a</sup> ed. São Paulo: Atual, 2013.
3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 5. *Teoria dos Números*. 2<sup>a</sup> ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2014.