Material Teórico - Teorema de Menelaus e Relação de Stewart

A Relação de Stewart

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de fevereiro de 2020

1 A Relação de Stewart

Neste material, apresentaremos uma demonstração e algumas aplicações do resultado conhecido como **relação de Stewart**, que é uma fórmula que permite o cálculo da medida da ceviana AD de um triângulo ABC, quando são conhecidas as medidas dos lados AB e AC, além das medidas dos segmentos BD e CD.

Teorema 1 (Relação de Stewart). *Seja ABC um triângulo cujos lados AB, AC e BC medem, respectivamente, c, b e a. Se D é um ponto sobre o lado BC, tal que $\overline{BD} = m$, $\overline{CD} = n$ e $\overline{AD} = x$, então*

$$b^2m + c^2n = a(x^2 + mn). \tag{1}$$

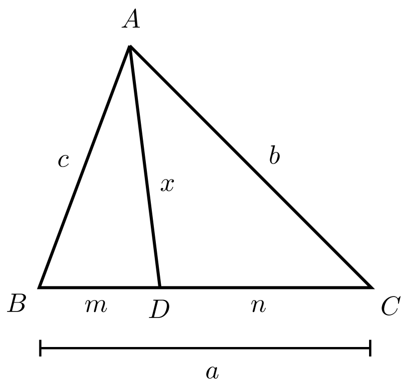
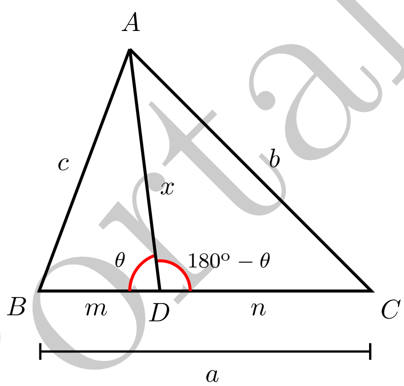


Figura 1: a relação de Stewart.

Prova. Denotando $A\widehat{D}B = \theta$, temos $A\widehat{D}C = 180^{\circ} - \theta$ (veja a figura abaixo).



Aplicando a Lei dos cossenos ao triângulo ABD, obtemos:

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2xm\cos\theta.$$

Daí, segue que

$$\cos\theta = \frac{x^2 + m^2 - c^2}{2xm} \tag{2}$$

Agora, lembrando que $\cos(180^{\circ} - \theta) = -\cos\theta$, aplicamos a Lei dos Cossenos ao triângulo ACD para obter:

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + n^2 - 2xn\cos(180^{\circ} - \theta) \\ &= x^2 + n^2 + 2nx\cos\theta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{b^2 - x^2 - n^2}{2xn}. \tag{3}$$

Igualando as expressões (2) e (3) para $\cos\theta$, chegamos à igualdade

$$\frac{x^2 + m^2 - c^2}{\cancel{2x}m} = \frac{b^2 - x^2 - n^2}{\cancel{2x}n},$$

ou seja,

$$n\left(x^2 + m^2 - c^2\right) = m\left(b^2 - x^2 - n^2\right).$$

Então, distribuindo os produtos em ambos os membros da igualdade acima e usando o fato de que $m + n = a$, um pouco de álgebra elementar fornece, sucessivamente,

$$\begin{gathered} nx^2 + nm^2 - nc^2 = mb^2 - mx^2 - mn^2 \\ nx^2 + mx^2 + nm^2 + mn^2 = mb^2 + nc^2 \\ b^2m + c^2n = (m+n)x^2 + (m+n)mn \\ b^2m + c^2n = ax^2 + amn \\ b^2m + c^2n = a(x^2 + mn). \end{gathered}$$

□

Observação 2. *Veja que a fórmula (1) pode ser reescrita como*

$$x^2 = \frac{b^2m + c^2n}{a} - mn.$$

Se o ângulo $\angle BAC$ for reto e x for a altura de ABC relativa ao lado BC (que será a hipotenusa), então, nas notações da figura 1, as relações métricas em triângulos retângulos fornecem

$$b^2 = an \quad e \quad c^2 = am.$$

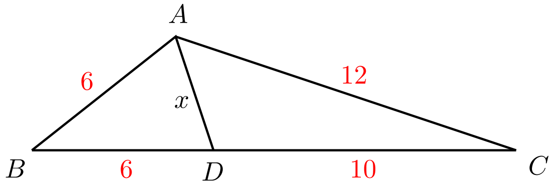
Assim, a Relação de Stewart pode ser escrita como

$$x^2 = \frac{anm + amn}{a} - mn = \frac{2\cancel{a}mn}{\cancel{a}} - mn = mn,$$

fórmula que também já conhecemos do estudo de relações métricas em triângulos retângulos.

A seguir, mostraremos como é possível calcular as medidas de algumas cevianas de um triângulo dado, utilizando a Relação de Stewart.

Exemplo 3. *Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 16$ e $\overline{AC} = 10$. Considere um ponto D sobre o lado BC tal que $\overline{BD} = 6$ e $\overline{CD} = 10$. Calcule a medida x da ceviana AD.*



Solução. Utilizando a relação de Stewart, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}+\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}}{\overline{BC}}-\overline{AD}\cdot\overline{CD}\\ &= \frac{12^2\cdot 6+6^2\cdot 10}{16}-6\cdot 10=\frac{144\cdot 6+36\cdot 10}{16}-60\\ &= \frac{864+360}{16}-60=\frac{1224}{16}-60\\ &= \frac{1224-960}{16}=\frac{264}{16}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$x=\sqrt{\frac{264}{16}}=\frac{\sqrt{264}}{\sqrt{16}}=\frac{2\sqrt{66}}{4}=\frac{\sqrt{66}}{2}.$$

$\square$

Exemplo 4. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ e $\overline{BC}=a$. Denotando por M o ponto médio do lado BC, temos que a medida m_A da mediana AM é dada, em função de a, b e c, pela fórmula:*

$$m_A=\frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}}{2}.$$

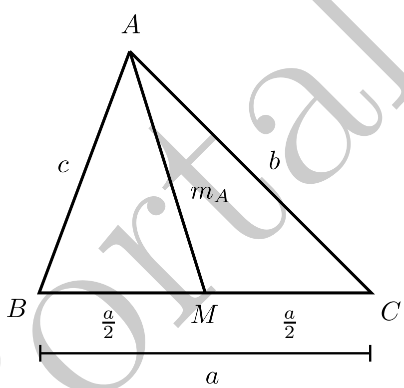


Figura 2: calculando as medianas.

Prova. Com as notações da figura acima, aplicando a Relação de Stewart ao triângulo ABC, obtemos:

$$b^2\cdot\frac{a}{2}+c^2\cdot\frac{a}{2}=a\Big(m_A^2+\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\Big).$$

Cancelando um fator a em ambos os membros, ficamos com a igualdade

$$\frac{1}{2}\left(b^2+c^2\right)=m_A^2+\frac{a^2}{4},$$

de sorte que

$$m_A^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}.$$

Portanto,

$$m_A=\frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}}{2}.$$

$\square$

Vale observar que fórmulas análogas valem para as medianas m_B e m_C relativas aos vértices B e C do triângulo ABC, respectivamente. Mais precisamente, temos:

$$m_B=\frac{\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}}{2}$$

e

$$m_C=\frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}}{2}.$$

Exemplo 5. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ e $\overline{BC}=a$. Sejam, ainda, m_A, m_B e m_C os comprimentos das medianas relativas aos vértices A, B e C, respectivamente. Mostre que*

$$\frac{m_A^2+m_B^2+m_C^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{4}.$$

Prova. Utilizando as fórmulas dadas no Exemplo 4 e observação subsequente, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{m_A^2+m_B^2+m_C^2}{a^2+b^2+c^2} &= \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4(a^2+b^2+c^2)}+\frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4(a^2+b^2+c^2)}\\ &\quad+\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4(a^2+b^2+c^2)}\\ &= \frac{2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2}{4(a^2+b^2+c^2)}\\ &\quad+\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4(a^2+b^2+c^2)}\\ &= \frac{3\,\cancel{\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{4\,\cancel{\left(a^2+b^2+c^2\right)}}=\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 6. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ e $\overline{BC}=a$. Se AD é a bissetriz interna relativa ao vértive A e $b_A=\overline{AD}$, então vale a fórmula:*

$$b_A=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},\tag{4}$$

em que $p=\frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro de ABC.

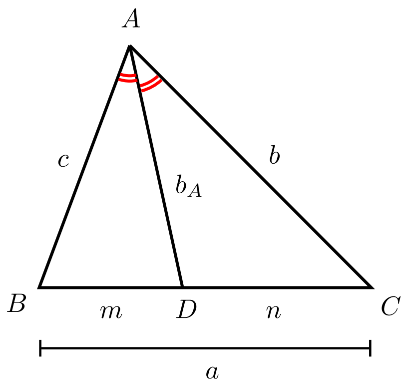


Figura 3: calculando as bissetrizes internas.

Prova. Denotando $\overline{BD} = m$, $\overline{CD} = n$ e invocando o Teorema da Bissetriz Interna, temos:

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b}.$$

Mas, como $a = m + n$, temos $n = a - m$, de sorte que, a partir da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{m}{c} = \frac{a-m}{b} &\Longrightarrow bm = ac - mc \\ &\Longrightarrow bm + cm = ac \\ &\Longrightarrow m(b+c) = ac \\ &\Longrightarrow m = \frac{ac}{b+c}. \end{aligned} \tag{5}$$

Substituindo essa expressão para m na relação $n = a - m$, chegamos a:

$$n = \frac{ab}{b+c}. \tag{6}$$

Agora, aplicando a Relação de Stewart ao triângulo ABC e utilizando as fórmulas (5) e (6), obtemos sucessivamente:

$$b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} + c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} = a\left(b_A^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c}\right)$$

$$\frac{ab^2c + abc^2}{b+c} = a\left(b_A^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right)$$

$$\frac{\cancel{a}bc(\cancel{b+c})}{\cancel{b+c}} = \cancel{a}\left(b_A^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right)$$

$$bc = b_A^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Então, utilizando novamente um pouco de álgebra elementar, temos:

$$\begin{aligned} b_A^2 &= bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \\ &= \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot \left[(b+c)^2 - a^2\right] \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot (b+c+a) \cdot (b+c-a) \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 2p \cdot (2p - 2a) \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 4p(p-a). \end{aligned}$$

Por fim, extraindo raízes quadradas em ambos os membros da igualdade

$$b_A^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 4p(p-a),$$

chegamos a (4). □

Como no caso das medianas, o leitor deve perceber que há fórmulas análogas para os comprimentos b_B e b_C das bissetrizes internas relativas aos vértices B e C de ABC, respectivamente:

$$b_B = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

e

$$b_C = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

O exemplo a seguir traz o análogo do exemplo anterior para bissetrizes externas. Nesse caso, porém, observe que temos uma suposição adicional.

Exemplo 7. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, e tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Se AD é a bissetriz externa relativa ao vértive A e $e_A = \overline{AD}$, então vale a fórmula:*

$$e_A = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-c)(p-b)}, \tag{7}$$

em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro de ABC.

Solução. Procedemos como na demonstração do exemplo anterior, supondo $c > b$ e observando que o caso $c < b$ pode ser analisado de forma idêntica. Mais precisamente, pondo $\overline{CD} = m$ e $\overline{BD} = n$, temos pelo Teorema da Bissetriz Externa que:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

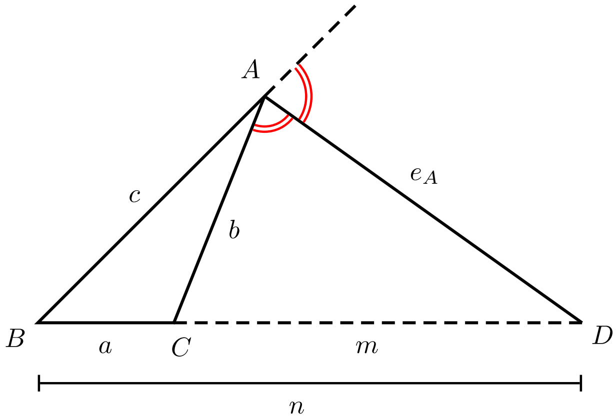


Figura 4: calculando as bissetrizes externas.

Agora, como $n = a + m$, a igualdade acima fornece

$$\begin{aligned} \frac{m}{b} = \frac{a+m}{c} &\Longrightarrow mc = ab + mb \\ &\Longrightarrow mc - mb = ab \\ &\Longrightarrow m(c-b) = ab \\ &\Longrightarrow m = \frac{ab}{c-b} \end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo $m = \frac{ab}{c-b}$ em $n = a + m$, obtemos:

$$n = \frac{ac}{c-b}. \tag{9}$$

Agora, aplicando a Relação de Stewart ao triângulo ABD e utilizando as fórmulas (8) e (9), obtemos:

$$c^2m + e_A^2a = n\left(b^2 + am\right)$$

$$c^2m + e_A^2a = nb^2 + nam$$

$$c^2 \cdot \frac{ab}{c-b} + e_A^2 a = \frac{ac}{c-b} \cdot b^2 + \frac{ab}{c-b} \cdot a \cdot \frac{ac}{c-b}.$$

Colocando a em evidência em ambos os membros acima, chegamos a

$$\cancel{a}\left(\frac{c^2b}{c-b} + e_A^2\right) = \cancel{a}\left(\frac{b^2c}{c-b} + \frac{ab}{c-b} \cdot \frac{ac}{c-b}\right),$$

logo,

$$\frac{c^2b}{c-b} + e_A^2 = \frac{b^2c}{c-b} + \frac{a^2bc}{(c-b)^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} e_A^2 &= \frac{b^2c}{c-b} - \frac{c^2b}{c-b} + \frac{a^2bc}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc(b-c)}{c-b} + \frac{a^2bc}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc(b-c)(c-b) + a^2bc}{(c-b)^2} \\ &= \frac{-bc\,(b-c)^2 + a^2bc}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc\left[a^2 - (b-c)^2\right]}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc(a+b-c)(a-b+c)}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc\,(2p-2c)\,(2p-2b)}{(c-b)^2} \\ &= \frac{4bc(p-c)(p-b)}{(c-b)^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, extraindo raízes quadradas em ambos os membros, obtemos (7). □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Ao explicar a Relação de Stewart, ressalte a Observação 2, pois, quando os alunos estudaram as relações métricas em triângulos retângulos, é provável tenham feito perguntas do tipo: "e se o triângulo não for retângulo?" Ou ainda, "e se fosse outra ceviana, em vez da altura"? Essa é a hora de explicar que a Relação de Stewart responde a essas perguntas mais gerais. Uma fórmula para a medida da altura em função da medida dos lados de um triângulo qualquer também pode ser deduzida a partir da Relação de Stewart, mas é mais fácil deduzi-la a partir da já conhecida fórmula de Herão.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. A. Caminha. *Coleção Profmat: Geometria.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.