Material Teórico - Módulo Probabilidade Condicional

Lei Binomial da Probabilidade

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Experimentos compostos

Nesta aula, estudaremos com um pouco mais de detalhes a quantidade de ocorrências de um evento fixo quando um mesmo experimento é repetido sucessivas vezes. Por exemplo, fixado um número natural n, podemos considerar o experimento em que jogamos um dado n vezes seguidas. Observe que isso pode ser interpretado tanto como n experimentos sucessivos ou como um único experimento composto. Na prática, para o cálculo das probabilidades, não importa se os experimentos são realizados simultaneamente (por exemplo, usando-se n cópias de um mesmo dado) ou sucessivamente (usando-se um mesmo dado n vezes seguidas), desde que o resultado da execução de um dos experimentos não afete os resultados dos demais.

Vejamos como introduzir formalmente a noção de experimentos compostos. Considere primeiro o caso onde temos apenas dois experimentos, digamos com espaços amostrais finitos Ω_1 e Ω_2. Para fixar as ideias, suponha que $\Omega_1 = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$ são os possíveis resultados do lançamento de uma moeda, e $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são os possíveis resultados do lançamento de um dado. O experimento composto formado pelos dois experimentos originais é aquele cujo espaço amostral é o produto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ e cada par ordenado (x_1, x_2), onde $x_1 \in \Omega_1$ e $x_2 \in \Omega_2$, ocorre com probabilidade

$$\Pr(x_1, x_2) = \Pr(x_1)\Pr(x_2),$$

onde $\Pr(x_i)$ é a probabilidade de x_i em Ω_i, para $i \in \{1, 2\}$. Como de costume, define-se a probabilidade de um evento $E \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, denotada $\Pr(E)$, como a soma das probabilidades dos elementos (no caso, pares ordenados) de E. Voltando ao nosso exemplo, o espaço resultante é aquele em que jogamos tanto a moeda como o dado e postulamos que os resultados deles sejam independentes.

Exemplo 1. *Considere um moeda desbalanceada onde a probabilidade de se obter cara é igual a* $2/3$. *Considere também um dado adulterado, no qual, para* $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, *a probabilidade de obter o número* i, *denotada por* $\Pr(i)$, *é a indicada na tabela abaixo:*

$\Pr(1) = 1/10$	$\Pr(2) = 1/10$	$\Pr(3) = 2/10$
$\Pr(4) = 3/10$	$\Pr(5) = 1/10$	$\Pr(6) = 2/10$

Considerando o experimento composto em que a moeda e o dado são lançados (de forma independente), responda:

(a) Qual a probabilidade de obtermos (ao mesmo tempo) 'Coroa' na moeda e o número 6 *no dado?*

(b) Qual a probabilidade de obtermos o número 6 *no dado e qualquer coisa na moeda?*

Solução. Veja que o espaço amostral do evento composto possui $2 \cdot 6 = 12$ elementos (porém a distribuição de probabilidade entre eles não é a equiprovável).

(a) A probabilidade de se obter o par $(\text{Coroa}, 6)$ como resultado do experimento é igual a

$$\Pr(\text{Coroa}, 6) = \Pr(\text{Coroa})\Pr(6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{30}.$$

(b) É de se esperar que, como o resultado da moeda é irrelevante aqui, a probabilidade de se obter o número 6 no experimento composto seja igual à probabilidade de se obter o número 6 quando jogamos apenas o dado, ou seja, $2/10$. Isso realmente ocorre, mas o motivo formal é um pouco mais sutil. No experimento composto há dois resultados possíveis nos quais o dado é igual a 6, que são: $(\text{Cara}, 6)$ e $(\text{Coroa}, 6)$. O que queremos é a soma das probabilidades deste resultados, que é igual a:

$$\begin{aligned}
&\Pr(\text{Cara}, 6) + \Pr(\text{Coroa}, 6) = \\
&\quad = \Pr(\text{Cara})\Pr(6) + \Pr(\text{Coroa})\Pr(6) \\
&\quad = (\Pr(\text{Cara}) + \Pr(\text{Coroa}))\Pr(6) = \Pr(6).
\end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de que, no experimento onde se lança apenas a moeda, temos

$$\Pr(\text{Cara}) + \Pr(\text{Coroa}) = 1.$$

□

Utilizando a definição acima, juntamente com a propriedade distributiva da multiplicação, é possível provar (mediante um argumento análogo ao apresentado na última parte da discussão do item (b) do exemplo anterior) a seguinte afirmação (mas não faremos os detalhes aqui):

> Dados eventos $E_1 \subseteq \Omega_1$ e $E_2 \subseteq \Omega_2$, a probabilidade do evento $E_1 \times E_2$ em $\Omega_1 \times \Omega_2$ é igual a $\Pr(E_1 \times E_2) = \Pr(E_1)\Pr(E_2)$.

Em particular, isso mostra que $\Pr(\Omega_1 \times \Omega_2) = 1$ e que, de fato, o modo que havíamos usado para definir Pr sobre $\Omega_1 \times \Omega_2$ nos dá uma distribuição de probabilidade.

Exemplo 2. *Uma urna contém os inteiros de* 1 *até* 10 *e outra possui os de* 1 *a* 20. *É sorteado um número de cada urna (de forma equiprovável dentre os números de cada uma delas). Qual a probabilidade de que o número sorteado da primeira urna seja um múltiplo de dois e o da segunda seja um múltiplo de três?*

Solução. A probabilidade de obtermos um múltiplo de dois na primeira urna é igual a $5/10 = 1/2$; a de obtermos um múltiplo de três na segunda urna é $6/20 = 3/10$. Como o valor do número obtido da primeiro urna não afeta o da segunda, temos um experimento composto. Pela observação do quadro acima, a probabilidade do evento formado pelos pares (x, y), onde x é múltiplo de dois e y é múltiplo de três, é igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}.$$

□

Generalizando a discussão que fizemos até aqui, suponha que tenhamos n experimentos, em vez de apenas dois, digamos sobre espaços de probabilidade $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. Usando argumentos completamente análogos aos expostos até aqui, podemos definir um espaço de probabilidade sobre o produto cartesiano $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, no qual

$$\Pr(E_1 \times \ldots \times E_n) = \Pr(E_1) \cdot \ldots \cdot \Pr(E_n).$$

Em palavras, a probabilidade da ocorrência de $E_1 \times \ldots \times E_n$ em $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ é obtida multiplicando-se as probabilidades de cada um dos eventos E_i em seus espaços originais Ω_i. Na seção seguinte, veremos um importante exemplo deste tipo, em que $\Omega_1 = \ldots = \Omega_n$.

2 Testes de Bernoulli e a Lei Binomial

Um teste de Bernoulli é um experimento aleatório que possui apenas dois resultados possíveis, usualmente chamados de "sucesso" e "falha", e tal que a probabilidade de sucesso é sempre a mesma todas as vezes que o experimento é realizado. Chamando de p a probabilidade de sucesso e de q a probabilidade de falha, temos claramente $q = 1 - p$. Um teste de Bernoulli pode ser expresso como uma pergunta em que a resposta é do tipo "sim" ou "não". Por exemplo: "A carta no topo do baralho é um Ás de espadas?"

Exemplo 3. *Considere o evento "obter o número 4" ao se jogar um dado honesto de seis faces. Podemos considerar como sucesso o caso em que o evento ocorre (ou seja, o número 4 é realmente obtido) e como falha o caso em que qualquer outro número é obtido. Temos então um teste de Bernoulli em que $p = 1/6$ e $q = 5/6$.*

Exemplo 4. *Uma prova é composta por 10 questões de múltipla escolha, cada uma com 5 opções, sendo só uma delas correta. Sandro responde às 10 questões ao acaso (chutando). Calcule a probabilidade de ele acertar:*

(a) Somente as duas primeiras questões.

(b) Somente as duas últimas questões.

(c) Exatamente duas questões da prova.

Solução. Como Sandro está chutando todas as respostas, para cada uma delas sua chance de sucesso é constante e igual a $1/5$. Estamos, então, realizando 10 testes de Bernoulli, nos quais $p = 1/5$.

(a) Sandro deve acertar as duas primeiras questões e errar cada uma das oito demais. Como a chance de acertar é $1/5$, a de errar é $1 - 1/5 = 4/5$; e, como as chances de acerto e erro em cada questão são independentes, a probabilidade desejada é:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^8 = \frac{4^8}{5^{10}}.$$

(b) De forma análoga ao item anterior, a probabilidade desejada é igual a:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^8 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4^8}{5^{10}}.$$

(c) Neste item, para cada duas das dez questões, devemos considerar o caso em que João acerta precisamente essas duas questões, errando todas as demais. Como esses casos são disjuntos, devemos então somar as probabilidades obtidas em cada um deles. Veja que, a exemplo dos itens anteriores, para qualquer par de questões, não importa qual a posição delas na prova, a probabilidade de João acertar exatamente elas será sempre igual a $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^8$. Portanto, é suficiente multiplicar esse valor pela quantidade de casos, ou seja, pelo número de maneiras de escolher o par de questões, que é $\binom{10}{2} = 45$. Assim, a probabilidade desejada é:

$$\binom{10}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^8 = 45 \cdot \frac{4^8}{5^{10}}.$$

□

Veja que a resposta do Item (c) acima é o termo de ordem dois do desenvolvimento binomial da expressão $\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right)^{10}$. O teorema abaixo generaliza esse fato.

Teorema 5 (Lei Binomial da Probabilidade)**.** *Considere um teste de Bernoulli onde a probabilidade de sucesso é igual a p e a probabilidade de falha é igual a $q = 1 - p$, com p e q são reais positivos. Sejam k e n inteiros tais que $0 \leq k \leq n$. Se o teste for realizado n vezes, então a probabilidade de obter sucesso* exatamente *k vezes é igual a*

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{1}$$

Solução. A prova deste teorema é, em verdade, idêntica à solução do item (c) do Exemplo 4. Para visualizá-la melhor, podemos representar os resultados dos n testes por uma sequência formada por n letras iguais a S ou F, onde S representa sucesso e F representa falha.

Para cada sequência desse tipo, a probabilidade de que a sequência de resultados dos n testes seja exatamente igual a ela é $p^t q^{n-t}$, onde t é o número de vezes em que a letra S aparece (e, consequentemente, $n - t$ é o número de vezes em que a letra F aparece).

A quantidade de tais sequências em que há exatamente k letras S é igual a $\binom{n}{k}$ (uma vez que esse é o número de maneiras de escolher as k posições a rerem ocupadas por letras S). Como cada uma dessas sequências (com exatamente k letras S) tem probabilidade igual a $p^k q^{n-k}$, segue que a probabilidade de que alguma delas ocorra é $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. □

Devemos tomar certo cuidado com a nomenclatura "sucesso/falha" ao definirmos um teste de Bernoulli. Esses nomes são apenas convenções que indicam se a reposta da pergunta do teste foi positiva ou negativa, mas em nenhum momento devem ser levados ao pé da letra, ou seja, não devem passar noções de mérito ou demérito.

Exemplo 6 (ENEM, modificado). *O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de* 0,2%. *Se uma loja acaba de vender* 5 *aparelhos desse modelo para um cliente, qual a probabilidade desse cliente sair da loja com exatamente* 2 *aparelhos defeituosos?*

(a) $2 \cdot (0{,}2\%)^5$.

(b) $5 \cdot (0{,}2\%)^2$.

(c) $10 \cdot (0{,}2\%)^2 \cdot (99{,}8\%)^3$.

(d) $10 \cdot (0{,}2\%)^3 \cdot (99{,}8\%)^2$.

(e) $10 \cdot (0{,}2\%) \cdot (99{,}8\%)$.

Solução. Veja que estamos fazendo cinco testes de Bernoulli. Como queremos determinar a probabilidade de que exatamente 2 aparelhos sejam *defeituosos*, a pergunta do teste é: "Esse telefone é defeituoso?". Assim, a probabilidade de sucesso do teste é igual à probabilidade de que cada um dos aparelhos seja defeituoso, ou seja, $p = 0{,}2\%$. Pelo teorema anterior, a probabilidade desejada é igual a:

$$\binom{5}{2} \cdot (0{,}2\%)^2 \cdot (99{,}8\%)^3 = 10 \cdot (0{,}2\%)^2 \cdot (99{,}8\%)^3.$$

Logo, o correto é o item c. □

Observação 7. *Em um teste de Bernoulli, é sempre bom ter em mente o significado de cada um dos fatores, ao invés de simplesmente aplicar cegamente a fórmula Teorema 5. Por exemplo, no caso do problema anterior,* $\binom{5}{2}$ *é o número de maneiras de escolhermos dois aparelhos para serem os defeituosos,* $(0{,}2\%)^2$ *é a probabilidade de que esses dois aparelhos escolhidos sejam de fato defeituosos e* $(99{,}8\%)^3$ *é a probabilidade de que os outros três aparelhos não sejam defeituosos.*

O motivo pelo qual o Teorema 5 é chamado de Lei Binomial é que o valor $B_{n,p}(k)$, como definido na equação (1), é um termo do desenvolvimento binomial da expressão $(p+q)^n$. De fato, temos que:

$$(p+q)^n = B_{n,p}(0) + B_{n,p}(1) + \cdots + B_{n,p}(n).$$

Lembrando que $p + q = 1$, conclui-se que

$$B_{n,p}(0) + B_{n,p}(1) + \ldots + B_{n,p}(n) = 1.$$

Isso não é uma surpresa, pois, ao realizarmos n testes de Bernoulli, a quantidade de sucessos é um número inteiro no intervalo de 0 a n. Realmente, para cada inteiro k, com $0 \le k \le n$, a probabilidade de obtermos k sucessos é igual a $B_{n,p}(k)$ e a soma de tais probabilidade deve ser igual a 1. Dessa forma, podemos pensar em $B_{n,p}$ como uma função que atribui probabilidades ao conjunto $\{0, 1, \ldots, n\}$. Ela é conhecida como uma *distribuição binomial* de probabilidades.

Exemplo 8. *Um dado honesto é lançado* 10 *vezes. Qual a probabilidade de que o número* 6 *seja obtido* pelo menos *oito vezes.*

Solução. Temos um teste de Bernoulli onde $p = 1/6$, o qual será executado $n = 10$ vezes. Assim, a probabilidade de obter exatamente k vezes o número seis é:

$$b_k = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} = \binom{10}{k}\frac{5^{10-k}}{6^{10}}.$$

Assim, o valor pedido no enunciado é igual a:

$$\begin{aligned} b_8 + b_9 + b_{10} &= \binom{10}{8}\frac{5^2}{6^{10}} + \binom{10}{9}\frac{5^1}{6^{10}} + \binom{10}{10}\frac{5^0}{6^{10}} \\ &= \frac{1}{6^{10}}(45 \cdot 25 + 10 \cdot 5 + 1) \\ &= \frac{1176}{6^{10}}. \end{aligned}$$

□

No próximo exemplo, fixados $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$, calculamos o valor de k para o qual o número $B_{n,p}(k)$ é o maior possível, i.e., calculamos qual quantidade de sucessos é a mais provável. Para simplificar a notação omitiremos os parâmetros n e p, escrevendo simplesmente $B(k)$ em vez de $B_{n,p}(k)$. Abaixo, utilizaremos a notação $\lfloor x \rfloor$, a qual representa o maior número inteiro que é menor ou igual a x; por exemplo, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$ e assim por diante.

Exemplo 9. *Uma moeda viciada fornece cara com probabilidade p e coroa com probabilidade q, onde p e q são números reais positivos tais que $p + q = 1$. Para $n \in \mathbb{N}$ e $0 \le k \le n$ inteiro, seja $B(k)$ a probabilidade de obter caras exatamente k vezes, jogando a moeda n vezes para cima. Mostre que:*

(a) Se $(n+1)p \notin \mathbb{Z}$, então $B(k)$ é máximo se, e só se, $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$.

(b) Se $(n+1)p \in \mathbb{Z}$, então $B(k)$ é máximo se, e só se, $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$ ou $k = \lfloor (n+1)p \rfloor - 1$.

Solução. Uma vez que os eventos *Cara* e *Coroa* são independentes, o Teorema 5 no diz que: $B(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Agora, seja $a_k = \frac{B(k)}{B(k+1)}$ para $0 \le k \le n-1$. Veja que $B(k) < B(k+1)$ se, e só se, $a_k < 1$.

Um cálculo simples fornece

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{n!\; p^k q^{n-k}}{k!\;(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!\;(n-k-1)!}{n!\; p^{k+1} q^{n-k-1}} \\ &= \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{q}{p} \\ &= \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{1-p}{p}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1}.$$

Consideremos, agora, seis casos separadamente (veja que exatamente um deles deve ocorrer). Veremos que em todos eles ou o item (a) ou o item (b) do enunciado é satisfeito.

(i) $a_0 > 1$: nesse caso, $a_k > 1$ para todo k, de sorte que $B(0) > B(1) > \cdots > B(n)$. Portanto, o maior valor possível para $B(k)$ ocorre somente para $k = 0$. Ademais, $a_0 = \frac{1-p}{np} > 1$, de forma que $(n+1)p < 1$ e, assim, $\lfloor (n+1)p \rfloor = 0$.

(ii) $a_{n-1} < 1$: esse caso pode ser tratado de modo análogo ao anterior. Dessa vez temos $B(0) < B(1) < \cdots < B(n)$, logo o valor máximo de $B(k)$ ocorre somente quando $k = n$. E temos ainda que $a_{n-1} = n\frac{1-p}{p} < 1$, que equivale a $n < (n+1)p$. E como, $(n+1)p < n+1$, temos que $\lfloor (n+1)p \rfloor = n$.

(iii) $a_0 < 1 < a_{n-1}$ e $a_k \ne 1$ para todo k: neste caso, existe um único inteiro $0 < l < n$ tal que $a_{l-1} < 1 < a_l$. Assim, a função $B(k)$ cresce estritamente para $0 \le k \le l$ e decresce estritamente para $l \le k \le n$, de forma que atinge seu valor máximo somente quando $k = l$. Por outro lado, as desigualdades $a_{l-1} < 1 < a_l$ equivalem a $l < (n+1)p < l+1$, de forma que $l = \lfloor (n+1)p \rfloor$.

(iv) $a_0 < 1 < a_{n-1}$ e $a_{l-1} = 1$ para algum $2 \le l \le n-1$: esse caso pode ser tratado de modo análogo ao anterior, observando-se ainda que $a_{l-1} = 1$ equivale a $B(l-1) = B(l)$ e a $(n+1)p = l$. Em particular, $(n+1)p$ é um inteiro, e os valores máximos possíveis para $B(k)$ ocorrem quando $k = l-1$ ou $k = l$.

(v) $a_{n-1} = 1$: Isso implica que $B(n-1) = B(n)$. Ademais, $a_k < 1$ para $k \le n-2$, de forma que $B(k)$ cresce estritamente para $0 \le k \le n-1$. Assim, o máximo é atingido por $B(n-1)$ e $B(n)$. Observe, agora, que $a_{n-1} = 1$ equivale a $(n+1)p = n$.

(vi) $a_0 = 1$: neste caso, $B(0) = B(1)$. Ademais, $a_k > 1$ para $k \ge 1$. Dessa forma $B(k)$ decresce para $k \ge 1$. Assim, o valor máximo é atingido por $B(0)$ e $B(1)$. Observe, agora, que $a_0 = 1$ equivale a $(n+1)p = 1$.

□

Terminamos esta aula apresentando um exemplo que, ainda que não possa ser enquadrado diretamente como um teste de Bernoulli, pode ser resolvido com o emprego de ideias semelhantes.

Exemplo 10 (UERJ, adaptado). *Uma máquina contém* 100 *pequenas bolas de borracha de* 10 *cores diferentes, sendo* 10 *bolas de cada cor. Sabe-se que uma das dez cores é a branca. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso. Inserindo-se* 3 *moedas, uma de cada vez, qual é a probabilidade de que a máquina libere três bolas, das quais exatamente duas são brancas?*

(a) 0,008.

(b) 0,025.

(c) 0,040.

(d) 0,072.

Solução 1. Neste caso não temos testes de Bernoulli pois, como não há reposição, as três bolas retiradas não são independentes. Por exemplo, a probabilidade da segunda bola ser branca depende do fato da primeira ser branca ou não.

Vamos usar a letra **B** para representar uma bola branca e a letra **N** para representar uma que não é branca. Olhando para a sequência de cores das bolas na ordem em que foram sorteadas, há três maneiras distintas de se obter exatamente duas bolas brancas: **BBN**, **BNB** ou **NBB**. Vamos calcular a probabilidade de cada um desses casos e, em seguida, somá-las. Em cada caso, a cálculo da probabilidade da cor da segunda e terceira bolas é feito condicionado à cor das bolas anteriores.

Caso BBN: A probabilidade da primeira bola ser branca é $10/100$, a probabilidade da segunda ser branca é $9/99$ e a probabilidade da terceira *não* ser branca é $90/98$. Sendo assim, a probabilidade deste caso é:

$$\frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98}.$$

Caso BNB: A probabilidade da primeira bola ser branca é $10/100$, a da segunda bola *não* ser branca é de $90/99$ e a da terceira bola ser branca é de $9/98$. Veja que a probabilidade deste caso é o produto das probabilidades acima, que é igual ao que obtivemos no caso anterior.

Caso NBB: A probabilidade da primeira bola *não* ser branca é de 90/100, a da segunda ser branca é de 10/99, e a da terceira ser branca é de 9/98. Novamente, o produto desses três números é igual ao valor obtido nos casos anteriores.

Por fim, a resposta é a a soma das probabilidades dos três casos, mas, como estas três probabilidade são idênticas, basta multiplicar uma delas por três, obtendo-se:

$$3 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} = \frac{27}{1078} \cong 0{,}025.$$

Logo, o item correto é o (b). □

Solução 2. Um solução alternativa, talvez mais elementar, para este problema pode ser obtida considerando diretamente o espaço de probabilidades que consiste de todas as $\binom{100}{3}$ maneiras de escolhermos três bolas de forma equiprovável. Com isso, o número de casos favoráveis é o número de maneiras de escolher exatamente duas bolas brancas dentre as 10 e um bola de outra cor. Isso é igual a $\binom{10}{2} \cdot \binom{90}{1}$

Dividindo-se o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, obtemos:

$$\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{90}{1}}{\binom{100}{3}} = \frac{\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{90}{1}}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2}} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 90}{100 \cdot 99 \cdot 98},$$

como era de se esperar. □

Problema 11. *Generalize o exemplo anterior para um urna com n bolas, dentre as quais b são brancas e sorteamos t bolas. Mais precisamente, queremos calcular a probabilidade de que, dentre as t bolas sorteadas, haja exatamente l bolas brancas, onde $0 \leq l \leq b$ é um inteiro também dado.*

Dicas para o Professor

O início desta aula traz alguns aspectos sutis e abstratos que decorrem da definição de produtos cartesianos de espaços de probabilidade. Por exemplo, dados espaços Ω_1 e Ω_2, usamos o mesmo símbolo Pr para a função de probabilidade em Ω_1 e Ω_2, a fim de evitar que a notação ficasse sobrecarregada. Em verdade, essas funções são distintas, uma vez que possuem domínios distintos; portanto, o mais correto teria sido utilizarmos as notações Pr_1 e Pr_2.

Para eventos $E_1 \subseteq \Omega_1$ e $E_2 \subseteq \Omega_2$, o valor de $\mathrm{Pr}(E_1 \times E_2)$ é definido formalmente como

$$\sum_{(x,y) \in E_1 \times E_2} \mathrm{Pr}(x, y),$$

onde havíamos definido $\mathrm{Pr}(x, y) = \mathrm{Pr}_1(x)\,\mathrm{Pr}_2(y)$; a partir dessa definição, pode-se provar (conforme indicado no texto) que

$$\mathrm{Pr}(E_1 \times E_2) = \mathrm{Pr}_1(E_1)\mathrm{Pr}_2(E_2).$$

De posse da fórmula acima, é imediato que

$$\mathrm{Pr}(E_1 \times \Omega_2) = \mathrm{Pr}_1(E_1) \quad \text{e} \quad \mathrm{Pr}(\Omega_1 \times E_2) = \mathrm{Pr}_2(E_2),$$

de sorte que os eventos $E_1 \times \Omega_2$ e $\Omega_1 \times E_2$ são independentes em $\Omega_1 \times \Omega_2$. Nesse sentido, veja que, formalmente, E_1 não é um evento do espaço $\Omega_1 \times \Omega_2$, muito embora ele possa ser naturalmente identificado com o evento $E_1 \times \Omega_2$. Uma observação análoga é válida para E_2.

As ponderações acima tencionam convencê-lo de que é preciso dosar com bastante cuidado o grau de formalismo adotado em sala de aula, em função da maturidade matemática da turma. Para alunos com mais experiência e ávidos por demonstrações, é possível fazer todos os detalhes. Mas, para aqueles que estão tendo um contato inicial com o assunto, pode valer mais a pena omitir os detalhes, simplesmente assumindo alguns dos fatos correspondentes como válidos. Cremos que tal postura não comprometeria seriamente a apresentação, uma vez que os resultados necessários, em grande parte, podem ser aceitos facilmente por nossa intuição. O mais importante, nesse sentido, é trabalhar os exemplos e exercícios com cuidado, uma vez que isso facilitará, em muito, a aprendizagem dos conceitos discutidos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. T. Apostol. *Cálculo, Volume 2*. Reverté, Porto, 1993.

2. P. C. P. Carvalho, P. Fernandez, A. C. de O. Morgado, J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.