Material Teórico - Módulo de MATEMÁTICA FINANCEIRA

Taxas Equivalentes

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Autor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Taxas equivalentes para juros simples

Em algumas situações, podemos nos deparar com operações financeiras nas quais o número de períodos de capitalização não é um múltiplo inteiro do tempo no qual a taxa de juros está expressa. Essa é a situação, por exemplo, em um empréstimo no regime de juros simples com taxa de 30% ao ano, mas que foi pago em apenas sete meses.

Em casos como este, a fim de obter o montante de juros pagos, devemos calcular uma taxa de juros *equivalente* à original, mas expressa em termos da duração dos períodos de capitalização (no exemplo acima, isso significa obter uma taxa equivalente à original – que era anual –, expressa *ao mês*).

Para entendermos melhor como proceder, analisemos o seguinte exemplo concreto.

Exemplo 1. *Para consertar seu carro, um taxista realizou um empréstimo de* R\$7.000,00 *a uma taxa de juros simples de* 2,64% *a.m. Se a duração do empréstimo foi de* 220 *dias, qual o montante pago em juros?*

Solução. Primeiramente, observe que a taxa de juros citada neste exercício é dada "ao mês" enquanto a duração do empréstimo é dada em dias. Vamos, então, calcular inicialmente a *taxa ao dia* equivalente à taxa de 2,64% a.m.

Recordando que 2,64% é o mesmo que 0,0264 e, para efeitos financeiros, um mês corresponde a 30 dias, basta resolvermos a seguinte regra de três, na qual i_d representa a taxa de juros ao dia:

$$\frac{0,0264}{i_d} = \frac{30}{1}.$$

Ao fazê-lo, obtemos $i_d = 0,00088$ (isto é, 0,088% a.d.)

Agora, para calcular o montante pago em juros, utilizamos a fórmula de taxa de juros simples:

$$VF = (1 + i \cdot t) \cdot VP.$$

Substituindo os valores que já conhecemos:

$$\begin{aligned} VF &= (1 + 0,00088 \cdot 220) \cdot 7000 \\ &= (1 + 0,1936) \cdot 7000 \\ &= 8355,2. \end{aligned}$$

□

De maneira formal, duas taxas de juros simples são consideradas **equivalentes** se, aplicadas sobre um mesmo capital C por um mesmo período de tempo, gerarem montantes iguais.

Um exemplo útil para você manter em mente, leitor, é o seguinte: uma taxa de (juros simples de) 30% a.m. é equivalente a uma taxa de 1% a.d.

Mais geralmente, considere um capital C aplicado (a juros simples) em duas situações:

(a) durante n_a períodos (de certa duração por período), a uma taxa i_a por período;

(b) durante n_b períodos (de certa duração por período, possivelmente diferente da anterior), a uma taxa i_b por período.

Suponha, ainda, que n_a períodos com a primeira duração e n_b períodos com a segunda duração correspondam a um mesmo intervalo total de tempo. Então, as taxas i_a e i_b serão equivalentes se, e somente se,

$$C(1 + n_a i_a) = C(1 + n_b i_b)$$

ou, ainda,

$$i_a = \frac{n_b}{n_a} \cdot i_b. \tag{1}$$

Exemplo 2. *Calcule, no regime de juros simples, a taxa trimestral correspondente a uma taxa bimestral de* 8%*?*

Solução. Podemos resolver essa questão de duas formas diferentes, a primeira delas utilizando a fórmula acima. Para tanto, basta notar que um período de um ano corresponde a quatro trimestres (de sorte que a taxa trimestral será aplicada por 4 períodos), e a seis bimestres (logo, a taxa bimestral será aplicada 6 vezes). Então, denotando a taxa trimestral por i_t, a relação (1) fornece

$$i_t = \frac{6}{4} \cdot 8\% = 12\%.$$

Outra forma de resolver (que, no final das contas, é equivalente à primeira forma acima) é utilizar a proporcionalidade das taxas de juros simples, como feito na primeira parte da solução do Exemplo 1: uma vez que a taxa é de 8% em dois meses (um bimestre), para calculá-la em três meses (um trimestre) basta resolver a regra de três abaixo:

$$\begin{array}{ccc} 8\% & — & 2 \\ i_t & — & 3 \end{array}$$

Logo, $i_t = \frac{3}{2} \cdot 8\% = 12\%$. □

As taxas equivalentes têm uma importante aplicação em questões que tratam de *operações de desconto*. Essas operações ocorrem quando há um pagamento antecipado de uma dívida futura. Neste caso, por definição, o valor do desconto é a diferença entre o valor da dívida e o valor de pagamento antecipado; por sua vez, este é ajustado de acordo com a taxa de capitalização da dívida e com tempo que ainda falta para a data prevista do pagamento dessa dívida.

De outra forma, o valor para pagamento antecipado deve ser calculado levando-se em conta que o total da dívida corresponde ao valor antecipado, acrescido dos juros simples calculados sobre tal valor e referentes ao período de antecipação.

Também aqui, a maneira mais fácil de entender esse tipo de aplicação é pelo exame de uma situação concreta.

Exemplo 3. *Um título de valor nominal de* R\$4000, 00, *vencível em um ano, foi liquidado* 3 *meses antes de seu vencimento. Sendo de* 42%*a.a a taxa de juros simples do título, calcule o desconto dessa operação.*

Solução. Inicialmente, observe que o período de antecipação (um trimestre) corresponde a $\frac{1}{4}$ de um ano. Então, aplicando novamente a proporcionalidade das taxas de juros simples, concluímos que uma taxa de (juros simples de) 42% ao ano corresponde a uma taxa de $\frac{42\%}{4} = 10,5\%$ ao trimestre.

Denotando por C o valor da dívida em caso de pagamento antecipado, temos que os 4000 reais devidos inicialmente devem corresponder a C, acrescido de $10,5\%C = 0,105C$, que seria o montante de juros (simples) pago sobre C, caso não houvesse a antecipação. Isso nos dá a equação

$$4000 = C(1 + 0{,}105),$$

que resolvida fornece $C \cong 3619{,}90$.

Portanto, o valor do desconto será de $D = 4000 - 3619,90 = 380{,}10$ reais. □

2 Taxas equivalentes para juros compostos

Quando estamos trabalhando com juros compostos, a forma correta para achar taxas equivalentes entre diferentes períodos de tempo não é mais através de uma simples proporcionalidade.

Para entender o porquê disso, considere o problema de calcular a taxa anual (de juros compostos) equivalente a uma taxa mensal de 1%. Sabemos que uma taxa mensal i_m, aplicada em juros compostos por 12 meses (que é o mesmo que 1 ano), multiplica um capital inicial por

$$(1 + i_m)^{12}.$$

Portanto, a taxa anual i_a equivalente deve ter o mesmo efeito sobre o mesmo capital, o que fornece a equação

$$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}.$$

Então, tomando $i_m = 0,01$ (isto é, 1%) e usando uma calculadora, obtemos

$$1 + i_a = (1,01)^{12} = 1,126.$$

Logo, $i_a = 0,126 = 12,6\%$, e concluímos que juros compostos de 1% a.m. correspondem a uma taxa de $12,6\%$ a.a.

Note que este valor que é maior do que a taxa equivalente no caso de juros simples, que é de 12% a.a.

De maneira mais formal, duas taxas de juros compostos são consideradas equivalentes quando, aplicadas sobre um mesmo capital C por períodos equivalentes de tempo, gerarem montantes iguais.

A fim de *quantificar* a definição acima, considere um capital C aplicado (a juros compostos) nas duas situações a seguir:

(a) durante n_a períodos (de certa duração por período), a uma taxa i_a por período;

(b) durante n_b períodos (de certa duração por período, possivelmente diferente da anterior), a uma taxa i_b por período.

Suponha, ainda, que n_a períodos com a primeira duração e n_b períodos com a segunda duração correspondam a um mesmo intervalo total de tempo. Então, uma vez que estamos no regime de juros compostos, as taxas i_a e i_b serão equivalentes se, e somente se,

$$C(1 + i_a)^{n_a} = C(1 + i_b)^{n_b},$$

ou seja, se, e somente se,

$$(1 + i_a)^{n_a} = (1 + i_b)^{n_b}.$$

Extraindo raízes de índice n_a em ambos os membros da última igualdade acima, obtemos $1 + i_a = (1 + i_b)^{\frac{n_b}{n_a}}$, de sorte que

$$i_a = (1 + i_b)^{\frac{n_b}{n_a}} - 1. \qquad (2)$$

Apliquemos a discussão acima a alguns exemplos, sempre sob o regime de juros compostos.

Exemplo 4. *Considerando, no regime de juros compostos, uma taxa de* 45% *a.a., calcule, em cada um dos itens a seguir, a taxa equivalente:*

a) diária;

b) mensal;

c) bimestral;

d) trimestral;

e) semestral.

Solução. Vamos utilizar (2), com $i_b = 45\% = 0,45$ e $n_b = 1$ ano.

No item (a), temos $n_a = 360$, uma vez que (pare efeitos financeiros) 360 dias correspondem a 1 ano. Então, com o auxílio de uma calculadora, obtemos

$$\begin{aligned} i_a &= (1 + 0,45)^{\frac{1}{360}} - 1 = \sqrt[360]{1,45} - 1 \\ &\cong 1,00103 - 1 = 0,00103 = 0,103\%. \end{aligned}$$

Em (b), temos $n_a = 12$, já que 1 ano tem 12 meses. Logo,

$$\begin{aligned} i_a &= (1 + 0,45)^{\frac{1}{12}} - 1 = \sqrt[12]{1,45} - 1 \\ &\cong 1,0314 - 1 = 0,0314 = 3,14\%. \end{aligned}$$

Analogamente, como 1 ano é o mesmo que 6 bimestres, 4 trimestres e 2 semestres, calculamos:

(c) $i_a = \sqrt[6]{1,45} - 1 \cong 0,0638 = 6,38\%$.

(d) $i_a = \sqrt[4]{1,45} - 1 \cong 0,0973 = 9,73\%$.

(e) $i_a = \sqrt[2]{1,45} - 1 \cong 0,204 = 20,4\%$.

□

Exemplo 5. *Enzo recebeu duas propostas de investimentos:*

i. O investimento A, que rende juros de 14% *ao trimestre.*

ii. O investimento B, que rende juros de 9% *ao bimestre.*

Qual dos dois é mais vantajoso do ponto de vista financeiro?

Solução. Basta tomar um período de tempo que seja simultaneamente um múltiplo de 2 meses (a duração de um bimestre) e 3 meses (a duração de um trimestre), digamos 1 ano, e calcular as taxas equivalentes às taxas dos investimentos A e B.

Para o investimento A, seja i_a a taxa anual equivalente à taxa trimestral $i_b = 14\% = 0,14$. Uma vez que $n_a = 1$ ano é o mesmo que $n_b = 4$ trimestres, (2) fornece

$$i_a = (1 + 0,14)^{\frac{4}{1}} - 1 \cong 1,6889 - 1 = 0,6889 = 68,89\%.$$

Para o investimento B, seja i_a a taxa anual equivalente à taxa bimestral $i_b = 9\% = 0,09$. Novamente, temos $n_a = 1$ ano, mas $n_b = 6$ bimestres. Portanto, (2) fornece

$$i_a = (1 + 0,09)^{\frac{6}{1}} - 1 \cong 1,6771 - 1 = 0,6771 = 67,71\%.$$

Portanto, a aplicação A é mais vantajosa. □

Ainda em relação ao exemplo anterior, vale notar que outra possível solução seria analisar quanto renderia um capital arbitrário (por exemplo de R$1000 reais, para facilitar os cálculos) sob os investimentos A e B, após um período de tempo que fosse simultaneamente um múltiplo de 2 meses (a duração de um bimestre) e 3 meses (a duração de um trimestre), digamos, 1 ano.

Observando novamente que 1 ano é o mesmo que 4 trimestres, no investimento A teríamos

$$VF = 1000(1 + 0,14)^4 \cong 1688{,}96.$$

Por outro lado, como 1 ano corresponde a 6 bimestres, no investimento B teríamos

$$VF = 1000(1 + 0,09)^6 \cong 1677{,}10.$$

Portanto, o investimento A é mais vantajoso.

No final das contas, o argumento imediatamente acima é essencialmente idêntico ao apresentado na primeira solução: nela solução, usamos as taxas anuais equivalentes para decidir qual aplicação seria a melhor; mas, nas notações da segunda solução, tais taxas equivalentes seriam aplicadas aos mesmos R$1000, fornecendo os mesmos valores finais. Isso também fica evidente ao compararmos numericamente os valores finais obtidos com as taxas equivalentes correspondentes.

Por fim, vamos realizar uma operação de desconto envolvendo juros compostos.

Exemplo 6. *Um título de valor nominal de* R$5000,00 *está sendo liquidado* 5 *meses antes de seu vencimento. Sendo de* 2%*a.m a taxa de juros composta do título, calcule o desconto dessa operação.*

Solução. Observe que uma taxa de 2% ao mês corresponde a uma taxa i em cinco meses (no regime de juros compostos), onde (novamente com o auxílio de uma calculadora)

$$i = (1 + 0,02)^5 - 1 = 0,104,$$

ou seja, $i = 10,4\%$. Assim, se C é o valor da dívida em caso de pagamento antecipado, temos que

$$C(1 + 0,104) = 5000 \Rightarrow C = 4528,98.$$

Portanto, o valor do desconto será $D = 5000 - 4528,98 = 471,02$ reais. □

Finalizemos este material utilizando (2) para comparar taxas equivalentes nos regimes de juros simples e compostos. Para tanto, observamos que é possível mostrar que, quando $n_b > n_a$, temos

$$(1 + i_b)^{\frac{n_b}{n_a}} > 1 + \frac{n_b}{n_a} \cdot i_b + \frac{n_b}{n_a}\Big(\frac{n_b}{n_a} - 1\Big)i_b^2.$$

Portanto, no regime de juros compostos, temos

$$i_a = (1 + i_b)^{\frac{n_b}{n_a}} - 1 > \frac{n_b}{n_a} \cdot i_b + \frac{n_b}{n_a}\Big(\frac{n_b}{n_a} - 1\Big)i_b^2.$$

Comparando a última expressão acima com (1), vemos que a taxa equivalente no regime de juros compostos ultrapassa a taxa equivalente no regime de juros simples (que é precisamente $\frac{n_b}{n_a} \cdot i_b$) em pelo menos

$$\frac{n_b}{n_a}\Big(\frac{n_b}{n_a} - 1\Big)i_b^2.$$

Imagine, por exemplo, uma taxa anual i_a, equivalente a uma taxa diária $i_b = 1\%$. Como $n_a = 1$ e $n_b = 360$, a taxa anual em regime de juros compostos ultrapassará aquela em regime de juros simples em pelo menos

$$360\Big(360 - 1\Big)0,01^2 \cong 12,924 = 1292,4\%.$$

Isso dá uma ideia do poder do regime de juros compostos, e de que devemos fugir de dívidas em cartão de crédito, por exemplo. A esse respeito, deixamos o seguinte

Exercício 7. *Uma operadora de cartão de crédito cobra uma taxa anual de* 360%*. Qual a taxa diária equivalente (no regime de juros compostos)?*

Sugestões ao Professor

Sugerimos separar dois encontros de 100 minutos cada para abordar os assuntos deste material. No primeiro encontro, ensine os conceitos de taxas equivalentes sobre juros simples e resolva os exemplos reunidos aqui. Também, deixe claro que os juros simples não são usados em aplicações reais; lembre os alunos de que eles formam simplesmente um passo *didático* para que os estudantes possam compreender melhor os conceitos de taxas equivalentes para juros compostos.

No segundo encontro, introduza o conceito de taxas equivalentes em juros compostos e resolva os exemplos que apresentamos. Aproveite o momento para mostrar a diferença entre as duas formas de capitalização. Se for o caso, incentive os alunos a utilizarem calculadoras para os cálculos mais difíceis. No final da aula, solicite aos alunos que comentem sobre situações reais nas quais eles se depararam com uma aplicação dos assuntos abordados nesta aula. Se possível, elabore exercícios que simulem as situações apresentadas pelos alunos.

Referências

[1] A. ASSAF NETO. *Matemática Financeira e suas Aplicações.* Atlas, 2008.

[2] A. BRUNI and R. FAMA. *Matemática Financeira com HP 12C e Excel.* Atlas, 2008.

[3] J. M. GOMES and W. F. MATHIAS. *Matemática Financeira.* Atlas, 2009.