Material Teórico - Módulo Miscelânea

Resolução de Exercícios - Parte 2

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Resolução de exercícios

Nesse material, apresentamos mais alguns exemplos envolvendo os conteúdos abordados nas aulas anteriores.

Exemplo 1 (Banco OBMEP). *Encontre todas as soluções, no conjunto dos números reais positivos, do sistema de equações:*

$$\begin{cases} x(x+y+z) &= 26 \\ y(x+y+z) &= 27 \\ z(x+y+z) &= 28 \end{cases}.$$

Solução. Somando as três equações, obtemos

$$x(x+y+z)+x(x+y+z)+x(x+y+z) = 26+27+28 = 81.$$

Colocando $x+y+z$ em evidência no primeiro membro da igualdade acima, segue que:

$$(x+y+z)^2 = 81.$$

Como estamos interessados apenas em soluções positivas, concluímos, então, que

$$x+y+z = 9.$$

Por fim, substituindo esse valor em cada equação do sistema original, obtemos:

$$x(x+y+z) = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{9},$$

$$y(x+y+z) = 27 \Rightarrow y = \frac{27}{9} = 3$$

e

$$z(x+y+z) = 28 \Rightarrow z = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}.$$

□

Exemplo 2. *Prove que*

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{8+\frac{1}{9}}}}}}}} + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{8+\frac{1}{9}}}}}}}}} = 1.$$

Solução. Denotando

$$A = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{8+\frac{1}{9}}}}}}},$$

devemos mostrar que

$$\frac{1}{2+A} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+A}} = 1.$$

Para tanto, não será necessário calcular o valor de A. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+A} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+A}} &= \frac{1}{2+A} + \frac{1}{\frac{1+A+1}{1+A}} \\ &= \frac{1}{2+A} + \frac{1+A}{2+A} \\ &= \frac{1+1+A}{2+A} \\ &= \frac{2+A}{2+A} = 1. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3 (Banco OBMEP). *Para fazer macarrão instantâneo é necessário colocar o macarrão para cozinhar exatamente por 3 minutos. Marcar exatamente 3 minutos é muito complicado sem um relógio, mas é possível se você tiver certas ampulhetas de areia que marcam tempos exatos em minutos. Por exemplo, suponha que você tem duas ampulhetas, uma que marca exatamente 7 minutos e outra que marca exatamente 4 minutos. Basta virá-las ao mesmo tempo e, quando a de 4 acabar, colocar o macarrão para cozinhar. Retirando o macarrão da panela quando a ampulheta de 7 minutos terminar, ele terá cozinhado por exatamente por $7-4=3$ minutos.*

(a) *Certo tipo de arroz instantâneo precisa cozinhar por exatamente 4 minutos. Mostre que é possível marcar o tempo para esse arroz cozinhar usando apenas uma ampulheta de 9 minutos e outra de 7 minutos. Qual o menor tempo total necessário para realizar essa tarefa?*

(b) *Podemos marcar 9 minutos se tivermos apenas uma ampulheta de 6 minutos e outra de 10 minutos?*

Solução.
(a) Seguindo a ideia do exemplo dado no enunciado do problema, para marcar 4 minutos podemos procurar um modo de virar as duas ampulhetas algumas vezes, de forma que a diferença entre os tempos seja exatamente 4 minutos. Observando que

$$2\cdot 9 - 2\cdot 7 = 4,$$

uma possibilidade seria virar as ampulhetas duas vezes cada. De fato, podemos começar virando as duas ampulhetas ao mesmo tempo e, quando a de 7 minutos acabar pela segunda vez, iniciar a contagem dos 4 minutos. Então, quando a ampulheta de 9 minutos acabar pela segunda vez, teremos marcado 4 minutos.

Observe que há outros modos de marcar 4 minutos utilizando as duas ampulhetas dadas. Por exemplo, a igualdade $7 \cdot 7 - 5 \cdot 9 = 4$ nos dá um desses modos. Nesse caso, a ampulheta de 7 minutos deve ser virada 7 vezes e a de 9 minutos deve ser virada 5 vezes; o tempo será contado a partir do momento em que a ampulheta de 9 minutos acabar pela quinta vez, até quando a ampulheta de 7 minutos acabar pela sétima vez.

Para determinar o tempo mínimo para a realização da tarefa, veja que o tempo marcado é obtido pela subtração entre um múltiplo de 9 e um múltiplo de 7, ou entre um múltiplo de 7 e um de 9. Desse modo, o tempo total é ou um múltiplo positivo de 7 somado a 4 ou um múltiplo positivo de 9 somado a 4. Observe agora que, dentre os múltiplos positivos de 9, 18 é o menor que deixa resto 4 na divisão por 7. Por outro lado, o primeiro múltiplo de 7 que deixa resto 4 quando dividido por 9 é 49. Uma vez que já mostramos, no início da solução, que podemos marcar o tempo desejado em 18 minutos, concluímos que esse é o tempo mínimo.

(b) Como 6 e 10 são pares, as diferenças de seus múltiplos também são números pares. Assim, as ampulhetas dadas só permitem marcar tempos que representem números pares, de sorte que não é possível marcar 9 minutos. □

Exemplo 4 (Banco OBMEP). *Verifique que os dois números abaixo não são primos:*

(a) 3999991.

(b) 1000343.

Solução. Invocando os produtos notáveis:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

e

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} 3999991 &= 4000000 - 9 \\ &= 2000^2 - 3^2 \\ &= (2000+3)(2000-3) \\ &= 2003 \cdot 1997 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 1000343 &= 1000000 + 343 \\ &= 100^3 + 7^3 \\ &= (100+7)(100^2 - 100 \cdot 7 + 7^2) \\ &= 107 \cdot 9349. \end{aligned}$$

Portanto, nenhum dos números dados é primo. □

Exemplo 5 (Banco OBMEP). *Que número pode ser somado aos dois termos (numerador e denominador) de uma fração não nula dada para que se obtenha uma fração equivalente ao inverso da mesma?*

Solução. Denotando a fração por $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a, b \neq 0$, queremos encontrar um número inteiro x tal que $\frac{a+x}{b+x} = \frac{b}{a}$. Então, temos:

$$\begin{aligned} \frac{a+x}{b+x} = \frac{b}{a} &\Leftrightarrow a(a+x) = b(b+x) \\ &\Leftrightarrow a^2 + ax = b^2 + bx \\ &\Leftrightarrow ax - bx = b^2 - a^2 \\ &\Leftrightarrow (a-b)x = b^2 - a^2. \end{aligned}$$

Agora, lembrando que

$$b^2 - a^2 = -(a^2 - b^2) = -(a-b)(a+b),$$

temos

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow (a-b)x = -(a-b)(a+b). \qquad (1)$$

Daí, temos duas possibilidades:

(i) Se $a \neq b$, então $a - b \neq 0$ e assim:

$$\begin{aligned} (a-b)x = -(a-b)(a+b) &\Leftrightarrow x = \frac{-(a-b)(a+b)}{a-b} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-\cancel{(a-b)}(a+b)}{\cancel{a-b}} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{a+b}{1} = -a-b. \end{aligned}$$

(ii) Se $a = b$, então $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$ e o segundo membro de (1) é sempre verdadeiro. Por sua vez, isto implica que, neste caso, podemos tomar x como sendo qualquer número inteiro tal que $a + x \neq 0$ (e, portanto, $b + x \neq 0$ também). Realmente, assim fazendo, teremos $b + x = a + x \neq 0$ e, daí,

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a+x}{a+x} = 1.$$

Assim, para uma resposta unificada ao problema, podemos somar, ao numerador a e ao denominador b da fração não nula dada, o oposto de sua soma, $-(a+b)$. □

Exemplo 6. *Encontre, caso exista, o menor número inteiro positivo que quando dividido por* 3 *deixa* 1*, quando dividido por* 4 *deixa* 2*, quando dividido por* 5 *deixa* 3 *e quando dividido por* 6 *deixa* 4*.*

Solução. Assumindo a existência de um tal número e o denotando por x, concluímos que existe um inteiro positivo k_1 tal que

$$x = 3k_1 + 1,$$

pois o resto na divisão de x por 3 é igual a 1. Daí, segue que

$$x + 2 = 3k_1 + 1 + 2 = 3k_1 + 3 = 3(k_1 + 1),$$

isto é, $x + 2$ é múltiplo de 3.

Analogamente, pelo fato de os restos na divisão de x por 4, 5 e 6 serem, respectivamente, iguais a 2, 3 e 4, existem inteiros positivos k_2, k_3 e k_4 tais que $x = 4k_2 + 2$, $x = 5k_3 + 3$ e $x = 6k_4 + 4$. Mas aí,

$$x = 4k_2 + 2 \Rightarrow x + 2 = 4k_2 + 4 = 4(k_2 + 1),$$

$$x = 5k_3 + 3 \Rightarrow x + 2 = 5k_3 + 5 = 5(k_3 + 1)$$

e

$$x = 6k_4 + 4 \Rightarrow x + 2 = 6k_2 + 6 = 6(k_4 + 1).$$

Os cálculos acima mostram que $x + 2$ deve ser múltiplo de 3, 4, 5 e 6. Como estamos procurando o menor valor possível para x, concluímos que $x + 2$ deve ser igual ao mínimo múltiplo comum de 3, 4, 5 e 6, ou seja, $x + 2 = 60$. Então, $x = 58$. □

Exemplo 7 (Banco OBMEP). *Quantos são os números inteiros positivos n para os quais a fração $\frac{2n^2+4n+18}{3n+3}$ é um número inteiro?*

Solução. Primeiramente, vamos simplificar a fração dada, para o quê começamos observando que $3n + 3 = 3(n + 1)$ e

$$\begin{aligned} 2n^2 + 4n + 18 &= (2n^2 + 4n + 2) + 16 \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) + 16 \\ &= 2(n + 1)^2 + 16. \end{aligned}$$

(Observe que, na última igualdade, utilizamos a fórmula para o quadrado da soma de dois termos para obter $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.) Assim:

$$\begin{aligned} \frac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3} &= \frac{2(n + 1)^2 + 16}{3(n + 1)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2(n + 1)^2 + 16}{n + 1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2(n + 1)^{\cancel{2}}}{\cancel{n + 1}} + \frac{16}{n + 1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(2(n + 1) + \frac{16}{n + 1} \right). \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \frac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3} \in \mathbb{N} &\Rightarrow 3 \cdot \frac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3} \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow 2(n + 1) + \frac{16}{n + 1} \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \frac{16}{n + 1} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (n + 1) \mid 16. \end{aligned}$$

Como $n + 1 \geq 2$ e os divisores positivos de 16 são 1, 2, 4, 8, 16, temos as seguintes possibilidades:

(i) $n + 1 = 2$: nesse caso, $n = 1$ e

$$\frac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3} = \frac{2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 18}{3 \cdot 1 + 3} = \frac{24}{6} = 4.$$

(ii) $n + 1 = 4$: temos $n = 3$ e

$$\frac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3} = \frac{2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 18}{3 \cdot 3 + 3} = \frac{48}{12} = 4.$$

(iii) $n + 1 = 8$: aqui, segue que $n = 7$, logo,

$$\frac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3} = \frac{2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 18}{3 \cdot 7 + 3} = \frac{144}{24} = 6.$$

(iv) $n + 1 = 16$: nesse último caso, temos $n = 15$, de modo que

$$\frac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3} = \frac{2 \cdot 15^2 + 4 \cdot 15 + 18}{3 \cdot 15 + 3} = \frac{528}{48} = 11.$$

Portanto, os valores inteiros e positivos de n que tornam a fração $\frac{2n^2+4n+18}{3n+3}$ um número inteiro são $n = 1$, $n = 3$, $n = 7$ e $n = 15$. □

Exemplo 8 (Banco OBMEP). *Prove que, se a e b são inteiros consecutivos, então*

$$a^2 + b^2 + (a \cdot b)^2$$

é um quadrado perfeito.

Solução. Como a e b são inteiros consecutivos, podemos, sem perda de generalidade, supor $a < b$ e denotar os números por $a = n$ e $b = n + 1$. Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + (a \cdot b)^2 &= n^2 + (n + 1)^2 + [n(n + 1)]^2 \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + [n(n + 1)]^2 \\ &= 2n^2 + 2n + 1 + [n(n + 1)]^2 \\ &= 2n(n + 1) + 1 + [n(n + 1)]^2 \\ &= [n(n + 1)]^2 + 2n(n + 1) + 1 \\ &= [n(n + 1) + 1]^2. \end{aligned}$$

Desse modo, fica provado que $a^2 + b^2 + (a \cdot b)^2$ é o quadrado de $n(n + 1) + 1$, ou seja, é um quadrado perfeito. □

Exemplo 9 (OBM). *Uma lista de números de dois algarismos é **legal** se, a partir de seu segundo termo, a quantidade de divisores positivos de cada termo é maior que a do termo que o precede na lista e, além disso, se pelo menos um de seus algarismos é maior que um dos algarismos do numero que o precede. Qual é o tamanho máximo de uma lista legal?*

Solução. Começamos lembrando que, dado um inteiro $n > 1$ com fatoração em primos

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$$

(isto é, $p_1, p_2, \ldots p_k$ são números primos dois a dois distintos e $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são inteiros positivos), a quantidade de divisores positivos de n é dada pelo produto

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_k + 1).$$

Observe também que, para n como acima, sua quantidade de fatores primos (não necessariamente distintos) é $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, ao passo que sua quantidade de fatores primos distintos é k.

Agora, como $2^7 = 128 > 99$ e 2 é o menor número primo que existe, concluímos que nenhum número natural de 2 algarismos pode ter mais do que 6 fatores primos (não necessariamente distintos) em sua decomposição. Note também que, como $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 99$, nenhum número natural de 2 algarismos pode ter mais do que 3 fatores primos distintos em sua decomposição.

A discussão acima permite concluir que qualquer número de 2 algarismos tem fatoração em primos do tipo

$$p^a \cdot q^b \cdot r^c,$$

com p, q, r números primos dois a dois distintos e a, b, c inteiros *não negativos* tais que $a + b + c \leq 6$. Além disso, uma vez que $2^3 \cdot 3^3 > 99$ e $2^4 \cdot 3^2 > 99$, não podemos ter dois dos expoentes a, b e c maiores ou iguais a 3, ou ainda iguais a 4 (ou a um número maior que 4) e 2; também, como $2^3 \cdot 3 \cdot 5 > 99$, não podemos ter $a \geq 3$ e $b, c > 0$.

Assim, é imediato que

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)(c+1) &\leq \max\{(3+1)(2+1),\\ &\qquad (5+1)(1+1),\\ &\qquad (2+1)(1+1)(1+1)\}\\ &= 12.\end{aligned}$$

Então, a quantidade máxima de divisores de um número de 2 algarismos é 12, sendo obtida com os números $2^3 \cdot 3^2 = 72$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ e $2^5 \cdot 3$.

Como não existe um inteiro de dois algarismos com 11 divisores (pois, como vimos, nenhum número de dois algarismos possui 10 fatores primos) e cada número de uma lista legal, a partir do segundo, deve ter mais divisores que o anterior, concluímos que a quantidade máxima de números de uma lista legal é $11 - 1 = 10$ (os números de divisores devem variar de 2 a 12, excluindo-se o 11). Por fim, levando em conta a condição de que, a partir do segundo número, pelo menos um dos algarismos de um número de uma lista legal deve ser maior que pelo menos um dos algarismos do número anterior, não é difícil montar um exemplo de lista legal com dez números:

$$11, 49, 27, 81, 32, 64, 56, 36, 48, 96.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min cada para discutir os exemplos que compõem esse material. Ao expô-los, saliente os conteúdos utilizados e faça uma breve recapitulação.

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume* 1*: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 6*: Complexos, Polinômios Equações.* São Paulo, Atual Editora, 2012.

3. D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg. *Círculos Matemáticos, a Experiência Russa.* Rio de Janeiro, IMPA, 2013.

Créditos pelas figuras:
www.freepik.com