Material Teórico - Módulo de EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Mais Exercícios sobre Equações

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

10 de novembro de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Neste material, resolveremos mais questões utilizando incógnitas para representar valores desconhecidos. As questões aqui reunidas foram, em sua grande maioria, retiradas do ENEM, de outros exames vestibulares e olimpíadas. Tenha em mente que os problemas possuem como objetivo principal estimular a capacidade de interpretar matematicamente as situações apresentadas em forma de texto. Inclusive, algumas questões podem ser resolvidas sem o uso de uma equação explícita.

Exemplo 1 (ENEM 2010). *Uma escola recebeu do governo uma verba de* R\$ 1000,00 *para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados e concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastaria um selo de* R\$ 0,65*, enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de* R\$ 0,65*, um de* R\$ 0,60 *e um de* R\$ 0,20*. O diretor solicitou que fossem comprassem selos de modo a possibilitar a postagem de exatamente* 500 *folhetos do segundo tipo, assim como uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do maior número possível de folhetos do primeiro tipo. Quantos selos de* R\$ 0,65 *foram comprados?*

Solução. Observe que um folheto do segundo tipo custa, em selos,

$$0,65 + 0,60 + 0,20 = 1,45.$$

Para postar 500 folhetos desse tipo, serão gastos $500 \times 1,45 = 725$ reais. Assim, do dinheiro enviado pelo governo, sobrarão $1000 - 725 = 275$ reais para serem gastos em folhetos do primeiro tipo. Uma vez que

$$\frac{275}{0,65} \cong 423,07,$$

concluímos que essa sobra é suficiente para enviar até 423 folhetos do primeiro tipo. Então, teremos um total de $423 + 500 = 923$ selos de 0,65 reais. □

Exemplo 2 (FGV). *Uma fábrica de camisas tem um custo mensal de operação dado por $C = 5000 + 15x$, onde x é o número de camisas produzidas por mês. Cada camisa é vendida por* R\$ 25,00 *e, atualmente, o lucro mensal da fábrica é de* R\$ 2000,00*. Para dobrar esse lucro, a fábrica deverá produzir e vender mensalmente:*

(a) o dobro do que produz e vende hoje.

(b) 100 *unidades a mais do que produz e vende hoje.*

(c) 200 *unidades a mais do que produz e vende hoje.*

(d) 300 *unidades a mais do que produz e vende hoje.*

(e) 50% *a mais do que produz e vende hoje.*

Solução. Se cada camisa é vendida por 25 reais, a receita total obtida pela venda de x camisas será de $25x$ reais. Como o lucro, por definição é a diferença entre a receita e a despesa, concluímos que o lucro gerado pela venda de x camisas é, em reais, igual a

$$25x - (15x + 5000) = 10x - 5000.$$

Sendo o lucro atual de 2000 reais, temos que

$$10x - 5000 = 2000$$

e, daí, $10x = 7000$ ou, ainda, $x = 700$.

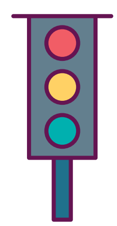
Para dobrar o lucro (de 2000 para 4000), a quantidade de camisas vendidas deve ser tal que

$$10x - 5000 = 4000.$$

Resolvendo esta equação, obtemos $10x = 9000$ e, daí, $x = 900$.

Portanto, deve-se aumentar a produção em $900 - 700 = 200$ unidades, de forma que o item correto é (c). □

Exemplo 3 (ENEM 2013). *Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por* 5 *segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. Sabe-se que cada ciclo dura Y segundos e, nele, a luz verde fica acesa durante X segundos.*



Qual das expressões a seguir representa a relação entre X e Y?

(a) $5X - 3Y + 15 = 0.$

(b) $5X - 2Y + 10 = 0.$

(c) $3X - 3Y + 15 = 0.$

(d) $3X - 2Y + 15 = 0.$

(e) $3X - 2Y + 10 = 0.$

Solução. Se a duração total do ciclo é Y segundos, concluímos que a luz ficará vermelha ou verde durante $Y - 5$ segundos. Se X corresponde ao tempo em que a luz fica verde e Z corresponde ao tempo em que ela fica vermelha, temos

$$X + Z = Y - 5.$$

O enunciado também diz que $X = \frac{2}{3}Z$, o que é o mesmo que $Z = \frac{3}{2}X$. Substituindo essa expressão de Z na igualdade acima, obtemos

$$X + \frac{3X}{2} = Y - 5.$$

Multiplicando tudo por 2, vem que

$$2X + 3X = 2Y - 10$$

ou, o que é o mesmo,

$$5X - 2Y + 10 = 0.$$

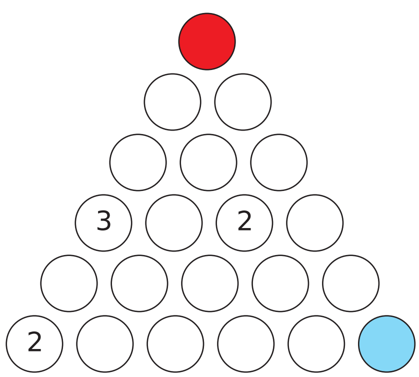
A resposta correta é o item (b). □

Exemplo 4 (OBMEP 2018). *Números naturais devem ser escritos dentro de cada círculo vazio da figura a seguir, de modo que a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos seja sempre a mesma.*

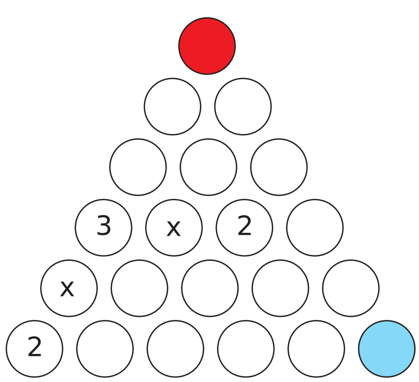
(a) Qual número deverá ser escrito no círculo vermelho?

(b) Mostre que a soma de todos os números escritos é um múltiplo de 7.

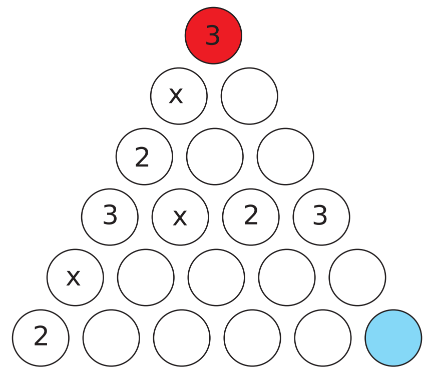
(c) Para que a soma de todos os números escritos seja 63, qual número deverá ser escrito no círculo azul?



Solução.
(a) De acordo com o enunciado, a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos é sempre a mesma. Assim, olhando para a figura abaixo, vemos que será escrito o mesmo número, que denotaremos por x, nos dois círculos entre os círculos em que estão escritos os números 2 e 3.

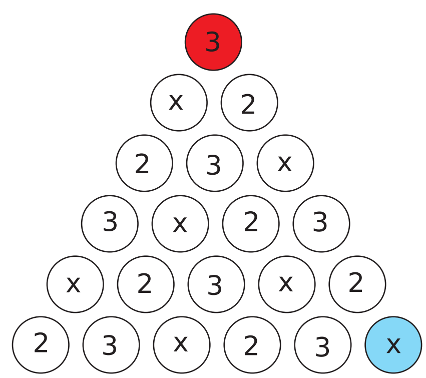


Além disso, se em dois de três círculos alinhados e consecutivos estiverem escritos os números 2, 3 ou x, sempre será possível saber o número que está escrito no terceiro círculo. Desta forma, é possível completar, como mostrado abaixo, a escrita dos números em todos os círculos que estão alinhados com os círculos em que estão escritos 2, 3 e x:



Logo, o número escrito no círculo vermelho deverá ser 3. Isto responde o item (a).

(b) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, "se em dois de três círculos alinhados e consecutivos estiverem escritos os números 2, 3 ou x, sempre será possível saber o número que está escrito no terceiro círculo", podemos completar a escrita em todos os círculos da figura, como abaixo:



Ao final, terão sido escritos sete números 2, sete números 3 e sete números x, de sorte que a soma de todos os números escritos é $7(2 + 3 + x)$, um múltiplo de 7.

(c) No preenchimento completo que fizemos acima, vemos que no círculo azul será escrito o número x e, para que a soma de todos os números escritos seja 63, devemos ter

$$7(2 + 3 + x) = 63.$$

Isso é o mesmo que $5 + x = \frac{63}{7} = 9$ ou, ainda, $x = 4$. □

Exemplo 5 (UFG - 2010). *Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a $\frac{2}{3}$ do valor para adultos.*

Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R\$ 8125, 00*. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.*

Solução. Sendo x o valor do pacote por adulto, temos que o valor cobrado por criança é $\frac{2x}{3}$. Portanot, uma família com três adultos e duas crianças pagou $3x+2\cdot\frac{2x}{3}$, de forma que

$$3x + \frac{4x}{3} = 8125.$$

Multiplicando todos os termos por 3, temos:

$$9x + 4x = 24375$$

ou, ainda, $13x = 24375$. Então, o preço por adulto é

$$x = \frac{24375}{13} = 1875,$$

enquanto o preço por criança é $\frac{2}{3}\cdot 1875 = 1250$. □

Exemplo 6 (OBM - 2001). *Dizemos que um número natural é legal se ele for igual à soma de dois naturais consecutivos e também for igual à soma de três naturais consecutivos.*

(a) Mostre que 2001 *é legal, mas* 1999 *e* 2002 *não são legais.*

(b) Mostre que 2001^{2001} *é legal.*

Solução. Sendo y e $y+1$ dois números inteiros consecutivos, sua soma é igual a

$$y + (y+1) = 2y + 1,$$

um número ímpar. Da mesma forma, se x, $x+1$ e $x+2$ são três inteiros consecutivos, sua soma será igual a

$$x + (x+1) + (x+2) = 3x + 3 = 3(x+1),$$

um número múltiplo de 3. Assim, para que um número seja legal, ele deve ser ímpar e múltiplo de 3.

Analisemos, agora, os itens (a) e (b):

(a) Note que 2001 é ímpar e múltiplo de 3, portanto, é um número legal. De fato, as equações $2y+1 = 2001$ e $3x+3 = 2001$ têm as soluções inteiras $y = 1000$ e $x = 666$. Por outro lado, 1999 é ímpar mas não é múltiplo de 3, ao passo que 2002 é par; portanto, esses números não são legais.

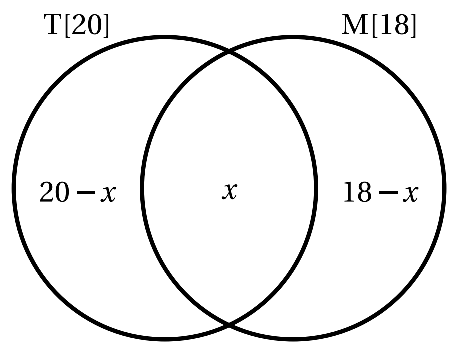
(b) Basta mostrar que 2001^{2001} é ímpar e múltiplo de 3, o que é imediato: 2001^{2001}, sendo o produto de 2001 números ímpares, também é ímpar; também, $2001 = 3\cdot 667$ implica $2001^{2001} = (3\cdot 667)^{2001}$, um múltiplo de 3. □

Exemplo 7. *Mário teve* 30 *horas de aula num curso extra de Matemática. Nos dias em que tinha aula, a duração era só de uma hora, que ocorria exclusivamente no período da manhã ou no período da tarde. Ademais, aconteceram* 20 *tardes e* 18 *manhãs sem aula durante o período do curso. Pergunta-se:*

(a) Em quantos dias não houve aula?

(b) Quantos dias durou o curso?

Solução. Podemos montar um diagrama com dois conjuntos entrelaçados, os conjuntos T, representando as tardes sem aula, e M, representando as manhãs sem aula. Assim, a interseção $T\cap M$, que possui x elementos, digamos, representa os dias inteiros sem aula.



(a) O conjunto $T\setminus M$ representa os dias com aula só pela manhã e o conjunto $M\setminus T$ representa os dias com aula só pela tarde. De posse de tais informações, preenchemos o diagrama com as informações de que houve $20-x$ manhãs com aula e $18-x$ tardes com aula, totalizando as 30 horas de curso. Como cada manhã ou tarde com aula corresponde a 1 hora, a discussão acima nos dá a equação

$$(20-x) + (18-x) = 30.$$

Então, $38 - 2x = 30$, de forma que $2x = 8$ e $x = 4$.

(b) Como houve 30 dias com aula e $x = 4$ dias sem aula, concluímos que o curso durou $30 + 4 = 34$ dias. □

Terminamos este material apresentando, a título de motivação para o estudo posterior de *sistemas de equações*, um problema clássico de Aritmética, que mostra a força do uso de incógnitas.

Exemplo 8. *Dois irmãos nasceram num mesmo dia do ano, mas em anos diferentes. Certo dia, o irmão mais velho disse ao mais novo: "eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tiveres a idade que eu tenho, a soma de nossas idades será de* 45 *anos". Quantos anos tem o irmão mais velho?*

Solução. Denotando por x e y, respectivamente, as idades do pai e do filho hoje, percebemos que a diferença entre as idades de ambos (que é constante) é $x - y$.

A primeira frase do enunciado diz que x (a idade que o pai tem hoje) é o dobro da idade que o filho tinha quando o pai tinha y anos de idade (a idade do filho hoje). Como o pai tinha y anos de idade há $x - y$ anos atrás, nessa época o filho tinha $y - (x - y) = 2y - x$ anos. Portanto, nossa primeira equação é $x = 2(2y - x)$ ou, ainda,

$$3x = 4y.$$

A segunda frase diz que, quando o filho tiver x anos de idade (ou seja, daqui a $x - y$ anos), a soma das idades de ambos será 45 anos. Ora, daqui a $x - y$ anos o pai terá $x + (x - y) = 2x - y$ anos, de forma que $x + (2x - y) = 45$, isto é,

$$3x - y = 45.$$

Substituindo a igualdade $3x = 4y$ na segunda equação, obtemos $4y - y = 45$, de forma que $y = 15$. Então,

$$x = \frac{4y}{3} = \frac{4 \cdot 15}{3} = 20.$$

□

2 Sugestões ao professor

Sugerimos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cada para abordar este material. Perceba que estes encontros devem ser uma continuação natural dos encontros anteriores e, portanto, os alunos já devem ter evoluído bastante até o momento. Dessa forma, resolva menos questões que trazem equações puras e mais questões que envolvam situações-problema.

Créditos pelas figuras:
`pt.vecteezy.com`