Material Teórico - Módulo de MATEMÁTICA FINANCEIRA

Inflação e Taxa Real

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Autor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

17 de julho de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Suponha que você fique sabendo, através de um amigo, sobre uma "oportunidade" de investimento em um determinado título de renda fixa que rende 30% ao mês. Apesar da tentação inicial, você resolve investigar melhor sobre este título e acaba descobrindo que trata-se de um investimento em títulos da dívida de um determinado país, no qual a inflação mensal média gira em torno de 40%. No final, você fica feliz em deixar essa "oportunidade" passar.

Após esse pequeno relato, fica fácil entender como a inflação é importante na hora de analisarmos uma determinada operação financeira. Portanto, quando incluímos a inflação em qualquer operação que envolva taxa de juros, faz-se necessário diferenciarmos entre **taxa de juros real** e **taxa de juros nominal**. Antes de formalizarmos estes conceitos, considere o seguinte exemplo, baseado em uma situação real:

Exercício 1 (Olimpíada Paulista de Matemática). *Atacando a defasagem salarial decorrente da inflação, os funcionários de faculdades de Los Angeles, EUA, assinaram e enviaram ao governo a seguinte mensagem:*

Prezados Senhores,

Estamos unidos num único propósito: queremos um aumento salarial. (Os valores estão em porcentagem).

Ano	Aumento Salarial	Inflação Anual	Ganho
1990	0	6	-6
1991	0	3,5	-3,5
1992	0	3,2	-3,2
1993	0	2,5	-2,5
1994	3	2,5	+0,5
1995	2,7	2,3	+0,4
			-14,3

Estamos cansados de trabalhar com números negativos! Utilizando uma calculadora, responda as perguntas:

(a) *Suponha que em* 1990 *o funcionário Arnald tinha um salário mensal de US\$*$1.000,00$. *Qual é o salário de Arnald no final de* 1995*?*

(b) *Suponha que em* 1990 *o funcionário Bernald tinha um gasto mensal de US\$*$1.000,00$. *Qual o gasto mensal de Bernald no final de* 1995*, levando-se em consideração que ele continua gastando com as mesmas coisas desde* 1990*?*

(c) *Baseados na tabela, os funcionários pediram um aumento salarial de* $14,3\%$. *Nesse caso, seriam realmente repostas todas as perdas salariais?*

Solução.
(a) O salário sofreu um aumento de 3% em 1994, passando para

$$1000 + 3\% \times 1000 = 1000 + 30 = 1030$$

dólares. Em seguida, sofreu um aumento de $2,7\%$ em 1995, passando então para

$$1030 + 2,7\% \times 1030 = 1030 + 27,81 = 1057,81$$

dólares.

(b) Lembrando que aumentar de $x\%$ é o mesmo que multiplicar por $1 + x\%$ o valor a ser aumentado, de acordo com os dados o gasto de US\$1000,00 em 1990 passou a ser de

$$(1 + 2,3\%) \times (1 + 2,5\%) \times (1 + 2,5\%) \times (1 + 3,2\%) \times$$

$$\times (1 + 3,5\%) \times (1 + 6\%) \times 1000$$

dólares em 1995. Isso totaliza US\$$1216,88$.

(c) Não. De acordo com o item (b), o gasto mensal de US\$1000,00 em 1990 aumentou de US\$216,88, ou seja, aumentou 21,688%, bem mais que os 14,3% pedidos. □

Esse primeiro exemplo serve bem para ilustrar como a falta de compreensão sobre a inflação e os juros podem fazer com que as pessoas tomem decisões ruins do ponto de vista financeiro.

Assim, precisamos diferenciar os **juros reais** (que levam em consideração a perda inflacionária) dos **juros nominais** (que são aqueles que geralmente constam nos contratos). A relação entre essas duas variáveis e a **taxa de inflação** é dada pela equação a seguir:

$$(1 + i_N) = (1 + \pi)(1 + i_R). \tag{1}$$

onde: e todas as taxas acima referem-se a um mesmo

i_N	é a taxa nominal de juros;
π	é a taxa de inflação;
i_R	é a taxa real de juros

período de tempo (i.e., são todas mensais, ou todas anuais etc).

É fácil compreender a relação (1) se pensarmos nos efeitos da inflação e da taxa nominal de juros sobre um capital C. Realmente, após um período de tempo, a taxa nominal de juros incrementa C em $(1 + i_N)C$, ao passo que a taxa de inflação deprecia $(1 + i_N)C$ pelo fator em $(1 + \pi)C$, de sorte que o valor real é

$$\frac{(1 + i_N)C}{1 + \pi}.$$

Então, esse deve ser o valor obtido quando aplicamos a C a taxa real de juros, de sorte que devemos ter

$$(1 + \pi)C = \frac{(1 + i_N)C}{1 + \pi}.$$

Cancelando C em ambos os membros da última igualdade acima, obtemos (1).

A seguir, colecionamos mais alguns exemplos.

Exercício 2. *Um investidor aplicou um capital de $R\$10.000,00$ e resgatou o total de $R\$13.600,00$ ao fim de 1 semestre. Se nesse período a taxa real de juros foi de 32%, calcule a taxa de inflação do período.*

Solução. O primeiro passo é descobrir qual foi a taxa de juros nominal i_N no período. Para isso, aplicamos a fórmula de juros compostos:

$$13600 = (1 + i_N) \cdot 10000 \Rightarrow 1 + i_N = 1,36 \Rightarrow i_N = 0,36.$$

Agora, substituindo os valores $i_N = 0,36$ e $i_R = 0,32$ em 1, obtemos, com o auxílio de uma calculadora,

$$1,36 = (1 + \pi)(1,32) \Rightarrow 1 + \pi \cong 1,0303 \Rightarrow \pi = 0,0303.$$

Em termos percentuais, temos então que $\pi \cong 3,03\%$. □

Para o próximo exercício, chamamos a atenção do leitor para o fato de que taxas de inflação seguem o mesmo regime dos juros compostos. Portanto, a inflação acumulada em um certo período *não é a soma* das inflações em cada subperíodo.

Exercício 3. *No primeiro mês de um ano, a taxa de inflação foi de 1,27%. No segundo mês, ela foi de 1,56% e no terceiro mês foi de 1,89%. De quanto foi a inflação acumulada no trimestre?*

Solução. Para encontrarmos a taxa de inflação acumulada π do período, observamos que ela corresponde à depreciação acumulada sobre um capital C, quando aplicamos ao mesmo, sucessivamente, as taxas de inflação correspondentes aos vários subperíodos.

Tais depreciações sucessivas fazem C transformar-se em $C/(1+0,0127)$ no fim do primeiro mês, depois em $C/(1+0,0127)(1+0,0156)$ no fim do segundo mês e finalmente em $C/(1+0,0127)(1+0,0156)(1+0,0189)$ no fim do terceiro mês. Portanto, devemos ter

$$\frac{C}{1+\pi} = \frac{C}{(1+0,0127)(1+0,0156)(1+0,0189)}$$

ou, ainda,

$$1 + \pi = (1 + 0,0127)(1 + 0,0156)(1 + 0,0189).$$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos

$$1 + \pi \cong 1,0479 \Rightarrow \pi \cong 4,79\%.$$

□

Exercício 4. *Joaquim trabalha em uma empresa e obteve um reajuste salarial de 12% no inicio de 2018. Admitindo-se que a inflação no ano de 2017 tenha atingido 20%, calcule qual foi a perda no poder de compra de Joaquim.*

Solução. Este exercício é uma simples aplicação da fórmula 1. Basta vermos o reajuste de 12% obtido por Joaquim como a "*taxa de aumento nominal*" (um ganho nominal sobre o capital – no caso, o salário de Joaquim) e em i_R como a "*taxa de aumento real*" do salário. Assim, com $\pi = 0,20$, temos sucessivamente:

$$1 + 0,12 = (1 + 0,20)(1 + i_R)$$

$$1 + i_R = \frac{1,12}{1,20} \cong 0,9333$$

$$i_R \cong -0,0666$$

Então, concluímos que Joaquim terá uma perda de 6,66% no seu poder de compra. Isso ocorreu devido ao fato da inflação ter superado a taxa de reajuste. □

Exercício 5. *Débora investiu 1.000 reais em um fundo de investimentos de renda fixa, com rentabilidade de 15% ao ano, durante dois anos. A inflação no primeiro ano foi de 5% e a inflação no segundo ano foi de 6%. Qual foi a rentabilidade real do investimento feito por Débora?*

Solução. Em primeiro lugar, vamos calcular a inflação acumulada π no período:

$$1 + \pi = (1 + 0,05) \cdot (1 + 0,06) = 1,113 \Rightarrow \pi = 11,3\%.$$

Agora, vamos calcular a rentabilidade nominal acumulada no período:

$$1 + i_N = (1 + 0,15) \cdot (1 + 0,15) \cong 1,322 \Rightarrow i_N \cong 32,2\%.$$

Por fim, substituindo os valores acima na fórmula 1, temos:

$$1,322 = (1 + i_R)1,113 \Rightarrow 1 + i_R \cong 1,188 \Rightarrow i_R \cong 18,8\%.$$

Então, observe que 18,8%, e não $30\% = 2 \times 15\%$, é a rentabilidade real acumulada em dois anos. □

2 Medidas de inflação

Podemos entender a inflação de um produto como o aumento no preço desse item. Por exemplo, suponha que o quilo do arroz custasse 4,00 reais há um ano, e que hoje custe 4,40. Nesse caso, dizemos que o preço do arroz sofreu uma inflação de

$$\frac{4,40 - 4,00}{4,00} = \frac{0,4}{4} = \frac{1}{10} = 10\%.$$

Agora, suponha que o quilo do feijão foi de 5,00 reais para 5,10 no mesmo período. Observe que houve uma inflação de

$$\frac{5,10 - 5,00}{5,00} = 2\%$$

no preço do feijão.

Suponha que Carlos sempre comprou dois quilos de feijão e um quilo de arroz. Veja que, no ano passado, Carlos comprava essa cesta de alimentos por

$$2 \times 5,00 + 1 \times 4,00 = 14,00$$

reais, mas que agora essa mesma cesta custa

$$2 \times 5,10 + 1 \times 4,40 = 14,60.$$

Então, como

$$\frac{14,60}{14} \cong 1,0428,$$

concluímos que a cesta de alimentos (com dois quilos de feijão e um quilo de arroz) teve uma inflação de aproximadamente $4,28\%$.

Para facilitar a discussão, vamos organizar essas informações na tabela a seguir:

Produto	**Ano 0**	**Ano 1**	**Inflação**
Feijão	5,00	5,10	$\frac{0,10}{5,00} = 0,02$
Arroz	4,00	4,40	$\frac{0,40}{4,00} = 0,10$
Cesta	14,00	14,60	$\frac{0,60}{14,00} \cong 0,0428$

Visualizando a tabela, fica claro que a inflação de cada item é diferente, e que também é diferente da inflação de uma cesta de produtos e/ou serviços.

Exercício 6. *Tendo por base os preços da tabela anterior, calcule a inflação da cesta composta por três quilos de arroz e cinco quilos de feijão.*

Solução. Vamos calcular o preço da cesta em dois momentos. No ano zero, ela valia

$$3 \times 4,00 + 5 \times 5,00 = 37,00$$

reais. No ano um, o novo preço era

$$3 \times 4,40 + 5 \times 5,10 = 38,70$$

reais. Então, como

$$\frac{38,70}{37,00} \cong 1,0459,$$

concluímos que a inflação foi de aproximadamente $4,59\%$. □

Chamaremos a inflação de cestas de produtos e serviços de **índice de inflação.** Após esse último exercício percebemos que, ao alterarmos a cesta (mesmo que ela ainda seja composta pelos menos produtos), também alteramos o índice de inflação. Portanto, cestas diferentes estão relacionadas com índices diferentes.

Quando os jornais falam em inflação estão, em verdade, falando sobre um índice de inflação calculado sobre uma cesta de bens e serviços *padrão*, determinada por órgãos governamentais ou privados. Nesse sentido, os principais índices de inflação utilizados no Brasil são:

- **IPCA** (Índice de Preços ao Consumidor Amplo): é elaborado pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), com o objetivo de abranger as cestas de produtos e serviços consumidas pelas famílias com rendimentos mensais compreendidos entre 1 e 40 salários-mínimos, qualquer que seja a fonte de rendimentos, e residentes nas áreas urbanas das diversas regiões do país. É o principal índice de inflação brasileiro, sendo utilizado pelo Banco Central para estabelecer as *metas de inflação* do governo.
- **IGP-M** (Índice Geral de Preços do Mercado): elaborado pela FGV (Fundação Getúlio Vargas), é uma média ponderada de outros três índices de inflação. O IGP-M é utilizado no cálculo do reajuste dos aluguéis.
- **INCC** (Índice Nacional de Custo da Construção): também elaborado pela FGV, foi concebido com a finalidade de aferir (isto é, estimar) a evolução dos custos de construções habitacionais. O INCC é utilizado pelas construtoras no financiamento de imóveis comprados na planta.

Para saber mais sobre índices de inflação, consulte o site o IBGE: `ww2.ibge.gov.br`

Sugestões ao Professor

Sugerimos separar dois encontros de 50 minutos cada para abordar os assuntos deste material. No primeiro encontro, ensine os conceitos de taxas de juros reais e nominais. Em seguida, resolva os exemplos reunidos neste material. Reforce a importância prática do conhecimento sobre a inflação em casos com motivações reais, como em investimentos ou reajustes salariais.

No segundo encontro, introduza o conceito de índice de inflação. Incentive os alunos a pesquisarem sobre as *séries históricas* dos principais índices de inflação brasileiros. No final da aula, solicite aos alunos que comentem sobre situações reais nas quais eles se depararam com uma aplicação dos assuntos abordados nesta aula. Se possível, elabore exercícios que simulem as situações apresentadas pelos alunos.

Referências

[1] A. ASSAF NETO. *Matemática Financeira e suas Aplicações.* Atlas, 2008.

[2] A. BRUNI and R. FAMA. *Matemática Financeira com HP 12C e Excel*. Atlas, 2008.

[3] J. M. GOMES and W. F. MATHIAS. *Matemática Financeira*. Atlas, 2009.

[4] Augusto C. Morgado, Eduardo Wagner, and Sheila C. Zani. *Progressões e Matemática Financeira*. SBM, 2015.