Material Teórico - Módulo Cônicas

Cônicas Rotacionadas

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Cônicas rotacionadas

Na primeira aula deste módulo, mencionamos que as cônicas possuem uma equação geral da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes reais.

Classificar uma cônica significa estudar sua equação e determinar se ela é uma parábola, uma elipse (ou círculo), uma hipérbole ou um dos casos degenerados (duas retas, uma reta, um ponto ou o conjunto vazio), como temos feitos nos vários exercícios e exemplos discutidos até aqui. Mas, em todos eles, o coeficiente do termo xy (o número real B, na expressão (1)), era igual a zero. Nesse caso, bastava completar quadrados e identificar o formato da equação reduzida obtida.

Quando $B \neq 0$, a equação geral ainda representa uma cônica (talvez degenerada), porém os seus eixos não são paralelos aos eixos cartesianos e a técnica de completar quadrados não é suficiente. Adiante, vamos mostrar que existe um ângulo θ tal que, ao realizarmos as substituições

$$\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta \\ y &= X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

obtemos uma equação em X e Y na qual o coeficiente de XY é zero. Pode-se mostrar, ainda, que a transformação de variáveis

$$(x, y) \longleftrightarrow (X, Y)$$

corresponde a uma *rotação* do plano cartesiano. Mais precisamente, um ponto no sistema cartesiano xOy pode ser obtido rotacionando um ponto no (novo) sistema cartesiano XOY de um ângulo θ, no sentido anti-horário e em torno da origem comum $(0, 0)$ dos dois sistemas. Neste texto, vamos assumir esse último fato como verdade, sem demonstração.

O importante do procedimento delineado acima é que uma rotação de sistema cartesiano não muda o formato de figuras. Assim, a curva obtida após a substituição de variáveis possui a mesma classificação que a curva original (i.e., continua sendo uma parábola, elipse, etc).

A título de ilustração do método, vamos começar analisando um caso simples, onde conseguimos calcular facilmente o ângulo θ adequado.

Exemplo 1. *Classifique a cônica* $xy = 1$.

Solução. Seja θ um angulo qualquer (que será escolhido mais à frente). Para escrever menos, vamos denotar $\cos\theta = c$ e $\operatorname{sen}\theta = s$. Fazendo as substituições $x = Xc - Ys$ e $y = Xs + Yc$ (compare com (2)), obtemos

$$(Xc - Ys)(Xs + Yc) = 1$$

ou, ainda (expandindo os produtos),

$$X^2cs + XY(c^2 - s^2) - Y^2sc = 1. \tag{3}$$

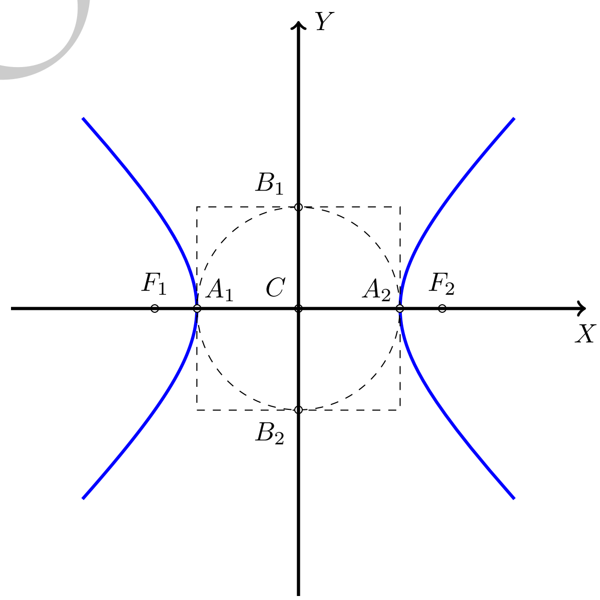
Agora, para que o coeficiente de XY seja zero, basta escolher θ de forma que $c^2 - s^2 = 0$, ou seja, $(\cos\theta)^2 = (\operatorname{sen}\theta)^2$. Há várias opções para θ e qualquer uma delas atende ao nosso propósito. Tomando $\theta = 45°$, temos que $c = s = \cos(45°) = \operatorname{sen}(45°) = \sqrt{2}/2$. Substituindo estes valores em (3), obtemos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) X^2 - 0 \cdot XY - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) Y^2 = 1$$

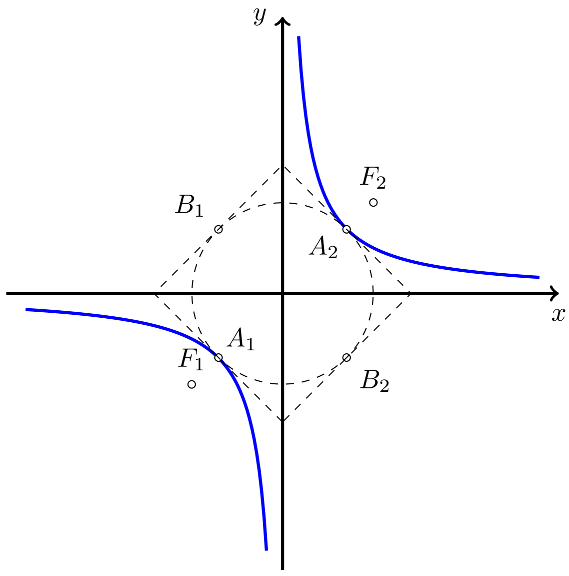
ou, o que é o mesmo,

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1.$$

Esta é a equação de uma hipérbole no sistema cartesiano XOY, com centro em $(0, 0)$ e na qual $a = b = \sqrt{2}$. Então, no sistema de coordenadas XOY, ela pode ser esboçada como na figura abaixo:



Agora, para obter a figura correspondente à equação original ($xy = 1$) no plano cartesiano xOy, basta rotacionar a figura acima em 45°, no sentido anti-horário. O resultado é a hipérbole desenhada na próxima figura:



$\square$

A seguir, mostramos como encontrar o ângulo θ de forma geral, quer dizer, para a equação dada como em (1). Como antes, começamos definindo $c = \cos\theta$ e $s = \operatorname{sen}\theta$; em seguida, substituímos $x = Xc - Ys$ e $y = Xs + Yc$ em (1), obtendo a equação:

$$A(Xc - Ys)^2 + B(Xc - Ys)(Xs + Yc) + C(Xs + Yc)^2 + \\ + D(Xc - Ys) + E(Xs + Yc) + F = 0.$$

Uma vez que queremos encontrar apenas o coeficiente de XY, não precisamos desenvolver toda a expressão do primeiro membro acima; o termo XY aparece apenas no desenvolvimento das parcelas da primeira linha e, somando as contribuições para o coeficiente de XY oriundas das três parcelas dessa linha, obtemos o resultado abaixo:

$$-A \cdot 2cs + (c^2 - s^2) + C \cdot 2cs.$$

Agora, usando as fórmulas trigonométricas do arco duplo, temos que $2cs = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(2\theta)$ e, da mesma forma, $c^2 - s^2 = (\cos\theta)^2 - (\operatorname{sen}\theta)^2 = \cos(2\theta)$. Logo, o coeficiente de XY é:

$$-A\operatorname{sen}(2\theta) + B\cos(2\theta) + C\operatorname{sen}(2\theta)$$

ou, ainda,

$$(C - A)\operatorname{sen}(2\theta) + B\cos(2\theta).$$

Lembre-se de que o objetivo com a mudança de variáveis $(x, y) \leftrightarrow (X, Y)$ é fazer com que o coeficiente de XY seja igual a zero. Então, temos de escolher θ de forma que $(C - A)\operatorname{sen}(2\theta) + B\cos(2\theta) = 0$, ou seja,

$$B\cos(2\theta) = (A - C)\operatorname{sen}(2\theta). \tag{4}$$

Como estamos assumindo $B \neq 0$, podemos escrever:

$$\cot(2\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{A - C}{B}.$$

Sendo assim, basta escolher $2\theta = \operatorname{arccot}\left(\frac{A-C}{B}\right)$ ou, o que é o mesmo,

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(\frac{A - C}{B}\right). \tag{5}$$

Em particular, veja que quando $A = C$ (como no Exemplo 1), basta tomar $\theta = 45°$, já que $\cot(90°) = 0$.

Quando tivermos $A \neq C$, também podemos escrever (4) como

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{B}{A - C},$$

obtendo, a partir daí,

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A - C}\right).$$

O exemplo a seguir ilustra a execução dos passos acima.

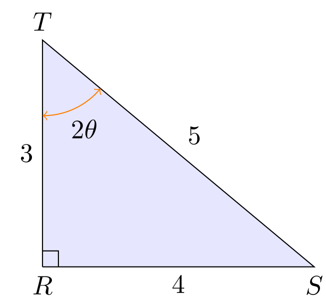
Exemplo 2. *Faça um esboço da cônica que possui equação*

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 - 24 = 0.$$

Solução. Nas notações de (1), temos $A = 4$, $B = -4$ e $C = 7$. Como $A \neq C$, temos uma cônica que foi rotacionada por um angulo θ, tal que

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{4 - 7} = \frac{4}{3}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, um triangulo retângulo RST que tem catetos RT e RS de medidas respectivamente iguais a 3 e 4 irá possuir hipotenusa ST de medida 5.



Sendo assim, temos $2\theta = R\widehat{T}S$, de forma que $\operatorname{sen}(2\theta) = 4/5$ e $\cos(2\theta) = 3/5$.

Usando as fórmulas trigonométricas para a metade de um arco, temos que:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Com isso, a substituição de variáveis que devemos fazer é:

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5}X - \frac{\sqrt{5}}{5}Y \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{5}}{5}X + \frac{2\sqrt{5}}{5}Y.$$

Substituindo esses valores na equação do enunciado, obtemos

$$\begin{aligned}&4\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}X - \frac{\sqrt{5}}{5}Y\right)^2 \\ &\quad - 4\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}X - \frac{\sqrt{5}}{5}Y\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}X + \frac{2\sqrt{5}}{5}Y\right) \\ &\quad + 7\left(\frac{\sqrt{5}}{5}X + \frac{2\sqrt{5}}{5}Y\right)^2 - 24 = 0.\end{aligned}$$

Ao desenvolvermos a expressão do primeiro membro acima, já sabemos que o coeficiente de XY será zero, pela escolha que fizemos de θ. Veja também que neste exemplo, os coeficiente de X e Y também são iguais a zero. Resta apenas calcular os coeficientes de X^2 e Y^2. Somando os termos que possuem X^2 após desenvolvimento do primeiro membro, obtemos que este coeficiente é igual a

$$4\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 7\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 3.$$

De modo análogo, como coeficiente de Y^2 teremos

$$4\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 4\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + 7\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 8.$$

Dessa forma, a equação da curva no sistema de coordenadas XOY é

$$3X^2 + 8Y^2 - 24 = 0,$$

que em forma reduzida corresponde a

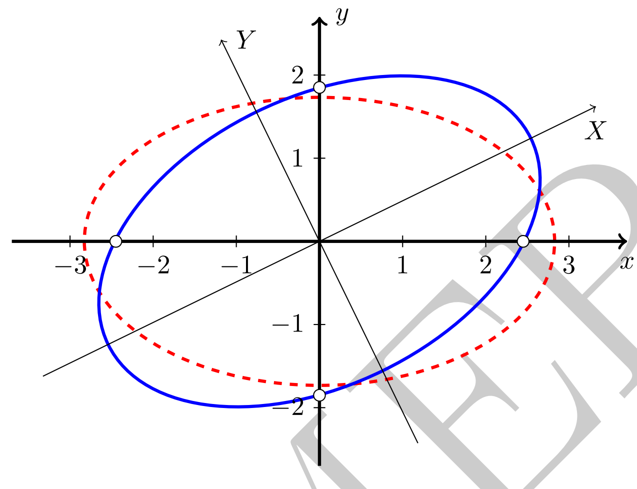
$$\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{3} = 1.$$

Esta é uma elipse com centro $(0,0)$ e semieixos medindo $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ (desenhada em vermelho na figura a seguir). O gráfico da elipse do enunciado pode ser obtido rotacionando essa elipse segundo o ângulo

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cong 26^\circ$$

em torno de $(0,0)$, no sentido anti-horário. O resultado está desenhado em azul.

Outro detalhe interessante, o qual ajuda no esboço da elipse do enunciado, é calcular seus pontos de interseção com os eixos Ox e Oy. Para tanto, fazendo $x = 0$ na equação original, obtemos $7y^2 = 24$, logo, $y = \pm\sqrt{24/7} \cong \pm 1{,}851$; por sua vez, fazendo $y = 0$ obtemos $4x^2 = 24$, logo, $x = \pm\sqrt{6} \cong \pm 2{,}449$. Estes pontos são os quatro marcados na figura por pequenos círculos brancos; veja que eles diferem das interseções da elipse vermelha com os eixos.



□

2 Observações complementares

Considerando a equação geral de uma cônica, equação (1), no caso particular em que $B = 0$, não é difícil nos convencermos de que, utilizando o método de completamento de quadrados, a classificação da cônica como parábola, elipse ou hipérbole depende apenas de AC ser positivo (elipse), zero (parábola) ou negativo (hipérbole), respectivamente. Veja que, aqui, estamos desconsiderando os casos degenerados; por exemplo, um par de retas concorrentes pode ser considerada uma hipérbole degenerada.

No caso em que $B \neq 0$, é possível demonstrar que a classificação depende apenas do sinal de $B^2 - 4AC$ e de A ou C serem nulos ou não, de acordo com a seguinte tabela:

Classificação das cônicas (cada caso pode também ser degenerado)	
$B^2 - 4AC = 0$ e $(A = 0$ ou $C = 0)$	Parábola
$B^2 - 4AC < 0$ e $A = C$	Círculo
$B^2 - 4AC < 0$ e $A \neq C$	Elipse
$B^2 - 4AC > 0$	Hipérbole

O número $B^2 - 4AC$ é chamado de *discriminante* da equação da cônica. Veja que ele possui a mesma fórmula que o discriminante, Δ, de uma equação de segundo grau em uma única variável e desempenha um papel semelhante. Mas, é preciso tomar cuidado, pois aqui A, B e C são os coeficientes de x^2, xy e y^2, respectivamente, enquanto que, em uma equação de segundo grau (com apenas uma variável x), tínhamos que A e B eram os coeficientes de x^2 e x, respectivamente, e C era o termo independente.

A princípio, para provar que a tabela acima vale, teríamos que fazer as substituições $x = X\cos\theta - Y\,\text{sen}\,\theta$ e $y = X\,\text{sen}\,\theta + Y\cos\theta$ em (1) e, em seguida, usar que θ é dado pela equação (5). Sobre X, Y, a equação assume a forma:

$$\hat{A}\,X^2 + \hat{C}\,Y^2 + \hat{D}\,X + \hat{E}\,Y + \hat{F} = 0,$$

para certos números reais $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ e $\hat{F}$. Então, fazendo contas simples, mas longas e tediosas, verificaríamos que $B - 4AC = -4\hat{A}\hat{C}$ e, como observado no início desta seção, conhecendo $\hat{A}\hat{C}$ conseguiríamos classificar a cônica correspondente.

Exemplo 3. *Na cônica $xy = 1$ do Exemplo 1 temos que $A = 0$, $B = 1$ e $C = 0$. Sendo assim, $B^2 - 4AC = 1^2 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 1 > 1$. Logo, essa cônica representa uma hipérbole, o que está de acordo com o que havíamos verificado.*

Exemplo 4. *A equação $4x^2 - 4xy + 7y^2 - 24 = 0$ do Exemplo 2 possui discriminante $B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7 = 16 - 112 = -96 < 0$. Portanto, ela é uma elipse e, como $A \neq C$, essa elipse não é um círculo.*

Terminamos observando que utilizando ferramentas de Álgebra Linear, todos os cálculos mencionados acima podem ser simplificados enormemente. Um pouco mais especificamente, é possível rescrever a equação geral de uma cônica como um produto de matrizes e fazer as mudanças de variáveis de forma mais simples. Além disso, fica mais claro o porquê da substituição de variáveis que utilizamos ser realmente uma rotação. Porém, essas demonstrações fogem do escopo deste texto.

Problema 5. *Faça um esboço do gráfico da cônica que possui equação $6x^2 + 4\sqrt{3}xy + 2y^2 - 9x + 9\sqrt{3}y - 63 = 0$.*

Dicas para o Professor

Este material pode ser apresentado em dois ou três encontros de 50 minutos. Comumente, no Ensino Médio não se trata do caso em que os eixos das cônicas não são paralelos aos eixo cartesianos. Entretanto, após estudar o caso em que os eixos da cônica são paralelos aos eixos coordenados, é bastante natural considerar o caso mais geral que tratamos aqui. Para uma turma que está bem familiarizada com Trigonometria e Geometria Analítica, pode-se demonstrar que a mudança de coordenadas $x = X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta$ e $y = X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta$ é realmente uma rotação, mesmo sem recurso à Álgebra Linear. Este aspecto pode ser discutido em um quarto encontro adicional; alternativamente, remetemos o leitor às referências.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Coleção Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 7: Geometria analítica.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.