Material Teórico - Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau

Inequações Produto do Segundo Grau

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de abril de 2020

1 Inequações produto do segundo grau

Neste material, utilizaremos os conhecimentos adquiridos sobre inequações do segundo grau para estudar inequações produto do segundo grau. Iniciamos com o seguinte exemplo:

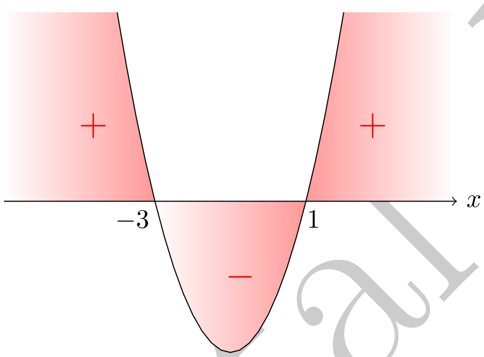
Exemplo 1. *Para quais números reais x vale*

$$\left(x^2+2x-3\right)\left(-x^2+2x-1\right)>0?$$

Solução. Comecemos analisando separadamente os sinais das funções quadráticas $f(x)=x^2+2x-3$ e $g(x)=-x^2+2x-1$. Podemos encontrar as raízes de $f(x)$ utilizando algum dos métodos que foram estudados no módulo sobre funções quadráticas. Aqui, faremos isso fatorando x^2+2x-3 diretamente. Temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+2x-3 \\ &= x^2+3x-x-3 \\ &= x(x+3)-(x+3) \\ &= (x+3)(x-1). \end{aligned}$$

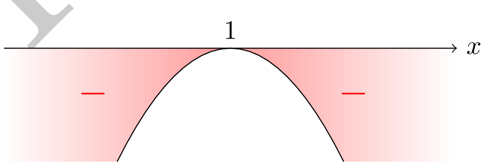
Assim, $f(x)$ possui raízes iguais a -3 e 1. Além disso, como o coeficiente de x^2 na expressão algébrica que define f é igual a 1, que é um número real positivo, temos que o gráfico de f é uma parábola voltada para cima:



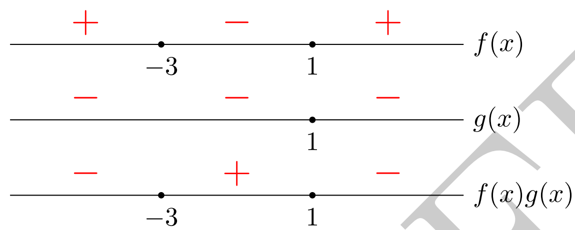
Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2+2x-1 \\ &= -\left(x^2-2x+1\right) \\ &= -(x-1)^2. \end{aligned}$$

Assim, o gráfico de g é uma parábola voltada para baixo, a qual tangencia o eixo das abcissas no ponto $(1,0)$.



Agora, o diagrama abaixo utiliza os sinais de $f(x)$ e $g(x)$, os quais estudamos acima, para obter o sinal de $f(x)g(x)$:



Observe que esse diagrama nada tem de misterioso: ele é simplesmente uma maneira organizada de aplicarmos a *regra de sinais* para o produto.

Assim, concluímos que o conjunto-verdade da inequação $\left(x^2+2x-3\right)\left(-x^2+2x-1\right)>0$ é:

$$V=\{x\in\mathbb{R}|-3<x<1\}=(-3,1).$$

□

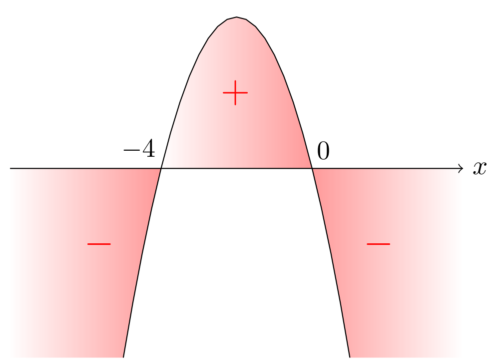
Exemplo 2. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação*

$$\left(-x^2-4x\right)\left(x^2+5\right)\leq 0.$$

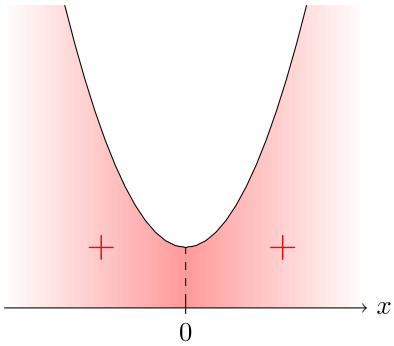
Solução. Repetindo o raciocínio empregado no exemplo anterior, começaremos analisando os sinais das funções quadráticas $f(x)=-x^2-4x$ e $g(x)=x^2+5$. Também como no exemplo anterior, vamos fatorar a expressão de $f(x)$ para encontrar as suas raízes:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2-4x \\ &= -\left(x^2+4x\right) \\ &= -x(x+4). \end{aligned}$$

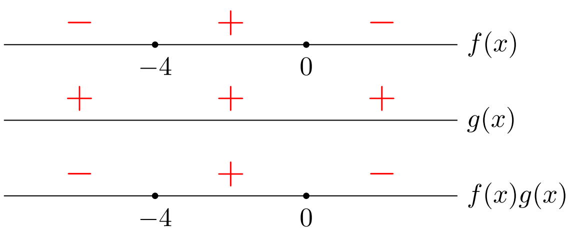
Assim, $f(x)$ possui raízes iguais a 0 e -4. Como o coeficiente de x^2 de $f(x)$ é -1, o gráfico de f é uma parábola que possui concavidade voltada para baixo, logo, possui a seguinte forma:



Agora, uma vez que $x^2\geq 0$, temos que $g(x)=x^2+5>0$, qualquer que seja o número real x. Uma representação para a parábola que representa o gráfico de g pode ser vista na figura a seguir:



No diagrama abaixo, utilizamos os sinais de $f(x)$ e $g(x)$, estudados acima, para obter o sinal de $f(x)g(x)$:



Portanto, concluímos que o conjunto-verdade da inequação $\left(-x^2-4x\right)\left(x^2+5\right) \le 0$ é:

$$V = \{x \in \mathbb{R} | x \le -4 \text{ ou } x \ge 0\} = (-\infty, -4] \cup [0, +\infty).$$

□

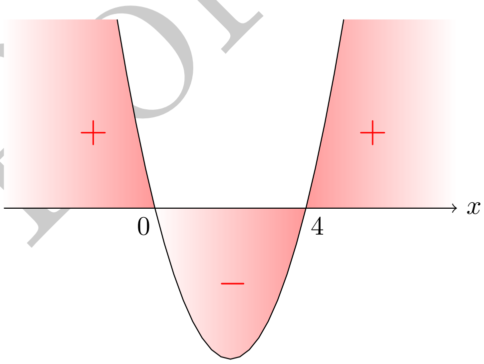
Exemplo 3. *Resolva, em* $\mathbb{R}$ *a inequação*

$$\left(x^2-4x\right)\left(-x^2+5\right) < 0.$$

Solução. Outra vez, vamos analisar os sinais das funções quadráticas $f(x) = x^2+4x$ e $g(x) = -x^2+5$ separadamente. Como

$$f(x) = x^2 - 4x = x(x-4),$$

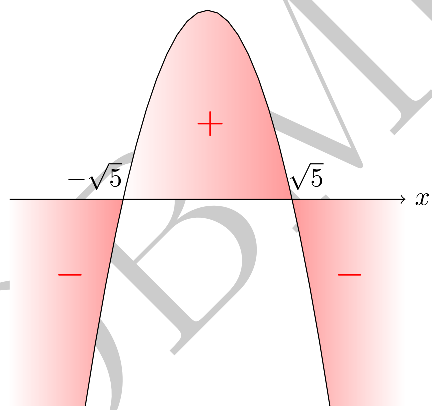
f possui raízes 0 e 4. Também, uma vez que o coeficiente de x^2 é igual a 1, a parábola que representa o gráfico de f possui concavidade voltada para cima. Veja na figura abaixo um esboço do gráfico de f:



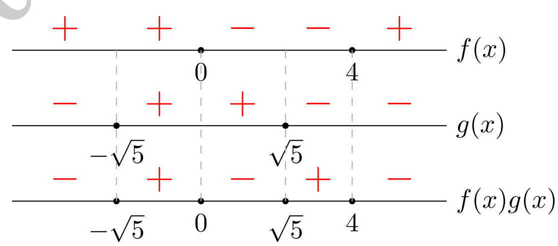
Da mesma forma, fatorando $g(x) = -x^2+5$, obtemos

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2+5 \\ &= -\left(x^2-5\right) \\ &= -\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

Assim, as raízes de $g(x)$ são iguais a $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$. Como o coeficiente de x^2 na expressão de $g(x)$ é -1, a parábola que representa o gráfico de g possui concavidade voltada para baixo. A figura a seguir é um esboço desse gráfico:



O diagrama abaixo traz o estudo do sinal de $f(x)g(x)$ a partir dos sinais de $f(x)$ e $g(x)$, os quais foram estudados acima.



Concluímos assim que o conjunto-verdade da inequação $\left(x^2-4x\right)\left(-x^2+5\right) < 0$ é

$$\begin{aligned} V &= \{x \in \mathbb{R} | x < -\sqrt{5} \text{ ou } 0 < x < \sqrt{5} \text{ ou } x > 4\} \\ &= (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (0, \sqrt{5}) \cup (4, +\infty). \end{aligned}$$

□

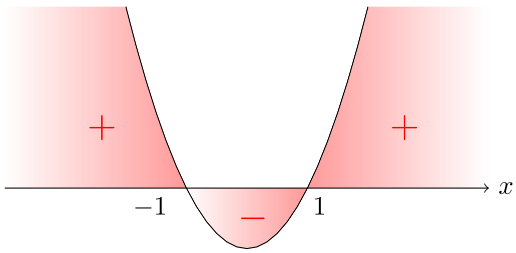
Exemplo 4. *Resolva, em* $\mathbb{R}$*, a inequação*

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right) \ge 0.$$

Solução. Uma vez mais, analisaremos separadamente os sinais das funções quadráticas $f(x) = x^2-1$, $g(x) = x^2-2$ e $h(x) = x^2-4$. Como

$$f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

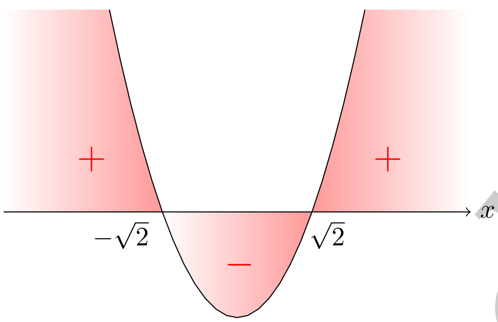
temos que $f(x)$ possui raízes iguais a 1 e -1. Como o coeficiente de x^2 na expressão que define $f(x)$ é igual a 1, a parábola que representa o gráfico de f tem concavidade voltada para cima. a figura abaixo mostra um esboço desse gráfico.



Analogamente,

$$g(x) = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}),$$

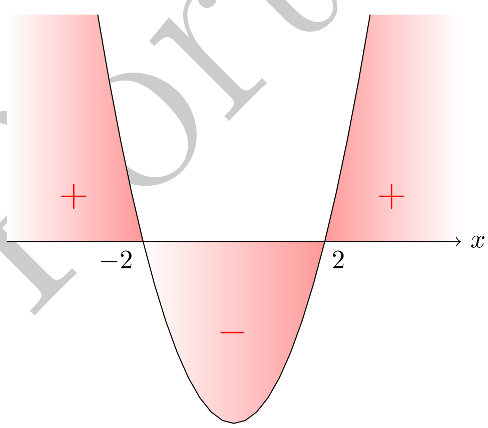
de onde concluímos que $g(x)$ possui raízes iguais a $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Além disso, o gráfico de g também é uma parábola côncava para cima.



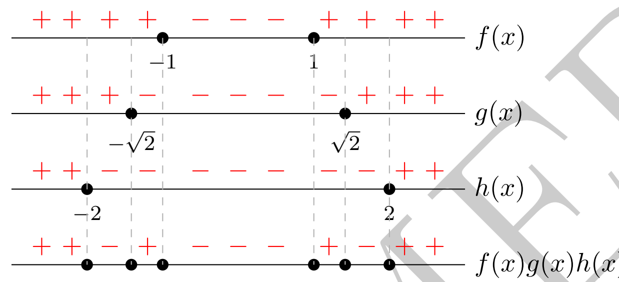
De modo semelhante ao que foi feito para as funções $f(x)$ e $g(x)$, temos

$$h(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Assim, $h(x)$ possui raízes iguais e 2 e -2 e seu gráfico também é uma parábola côncava para cima.



No diagrama abaixo, fazemos o estudo do sinal de $f(x)g(x)h(x)$ tendo como base os estudos dos sinais de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, feitos acima:



Desse modo, obtemos o conjunto-verdade da inequação $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 2\right)\left(x^2 - 4\right) \geq 0$:

$$V = (-\infty, -2] \cup [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}] \cup [2, \infty).$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. Um fato importante que deve ser observado é que, para estudar o sinal de uma função quadrática qualquer, só é necessário saber a concavidade da parábola e as raízes (caso existam). Neste material, optamos por não utilizar fórmulas prontas para encontrar as raízes das funções quadráticas que foram tratadas. Uma boa estratégia é propor aos alunos que tentem encontrar as raízes utilizando outros métodos.

As leituras complementares a seguir contêm material adicional sobre inequações envolvendo funções quadráticas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.