Material Teórico - Módulo de Função Exponencial

Equações Exponenciais

Primeiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

3 de novembro de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Portal da OBMEP

No material da aula *Funções exponenciais e suas propriedades*, Observação 8, vimos que uma função exponencial é sempre *injetiva*, ou seja, se, para um número real positivo a, tivermos $a^x = a^y$, então $x = y$.

Este fato nos fornece uma ferramenta para a resolução de equações onde a incógnita aparece no expoente de uma potência. Aprender técnicas sobre como resolver tais tipos de equações, ditas *exponenciais*, será o objetivo principal deste material.

1 Exemplos iniciais

Chamamos uma equação de **exponencial** se sua incógnita aparece como expoente de alguma potência. Vamos começar o estudo de equações exponenciais com alguns exemplos bem simples.

Exemplo 1. *Resolva a equação*

$$3^x = \frac{1}{3} - \frac{6}{27}.$$

Solução. Simplificando o segundo membro, obtemos

$$3^x = \frac{9-6}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}.$$

Escrevendo $3^x = 3^{-2}$ e observando que potências iguais de mesma base têm expoentes iguais, concluímos que $x = -2$. $\square$

Exemplo 2. *Resolva a equação*

$$5^x + 5^{x+2} = 650.$$

Solução. Podemos simplificar a equação, escrevendo $5^{x+2} = 5^x \cdot 5^2 = 5^x \cdot 25$ e, em seguida, colocando 5^x em evidência:

$$5^x(1 + 25) = 650.$$

Dividindo ambos os membros por 26, obtemos $5^x = 25$, equação que pode ser escrita como $5^x = 5^2$. Logo, $x = 2$. $\square$

Nos dois exemplos acima, após algumas simplificações, conseguimos reduzir a equação a uma igualdade de potências de mesma base, de sorte que igualar os expoentes nos levou à solução do problema. Entretanto, algumas vezes, a simplificação exige um pouco mais de esforço.

Exemplo 3. *Resolva a equação*

$$3^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{2x} = 3^{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \cdot 3^{x+\frac{3}{2}}.$$

Solução. Uma dificuldade inicial com esta equação é que a incógnita aparece como expoente de potências com bases distintas (base 2 e base 3), o que não deixa claro, de início, como proceder para reduzir a equação a uma igualdade de potências de mesma base.

Em casos como esse, uma ideia que por vezes funciona é separar as potências de bases distintas. Nesse sentido, uma primeira simplificação nos leva a

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 4^x = 3^x \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{4} \cdot 3^x \cdot 3\sqrt{3}.$$

Em seguida, multiplicando ambos os membros por $\sqrt{3}$, obtemos

$$4^x = 3 \cdot 3^x - \frac{9}{4} \cdot 3^x.$$

Multiplicando ambos os membros por 4, vem que

$$4 \cdot 4^x = 12 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x,$$

ou seja,

$$4 \cdot 4^x = 3 \cdot 3^x.$$

Portanto,

$$\frac{4^x}{3^x} = \frac{3}{4}$$

e, finalmente,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}.$$

Isso nos leva a $x = -1$. $\square$

Equações exponenciais há nas quais a incógnita aparece como expoente de uma potência que também é um expoente, como é o caso do próximo exemplo. Conforme veremos em sua solução, a ideia é considerar a potência do expoente em si como uma incógnita e, em seguida, resolver uma segunda equação exponencial para obter a incógnita inicial

Exemplo 4. *Resolva a equação*

$$3^{2^x} = 81.$$

Solução. Temos que $3^{2^x} = 3^4$ e isso implica $2^x = 4$, ou seja, $2^x = 2^2$ e $x = 2$. $\square$

Ainda em relação ao exemplo anterior, podemos tratar equações exponenciais da forma

$$a^{b^{c^x}} = d$$

(ou outras com mais *níveis de potenciação*) de modo análogo ao que fizemos acima.

Exemplo 5. *Resolva a equação*

$$2^{x^2-7x+8} = \frac{1}{16}.$$

Solução. Podemos escrever $2^{x^2-7x+8} = 2^{-4}$. Igualando os expoentes, obtemos $x^2 - 7x + 8 = -4$, ou seja, $x^2 - 7x + 12 = 0$. Essa equação quadrática tem soluções $x = 3$ e $x = 4$, que são as soluções da equação dada. $\square$

Portal da OBMEP

Uma equação exponencial pode não ter solução, como mostram os dois exemplos a seguir.

Exemplo 6. *Encontre, se possível, números reais x tais que*

$$5^x + 8 = 1.$$

Solução. Evidentemente, a equação não tem solução real, pois 5^x é positivo para qualquer x real, isto é, $5^x > 0$, e isso implica que $5^x + 8 > 8$, ou seja, $5^x + 8$ não pode ser igual a 1.

Outro modo de ver que essa equação não tem solução real é observar que ela é equivalente a $5^x = -7$. Como 5^x é positivo e -7 é negativo, esses dois números não podem ser iguais. □

Exemplo 7. *Encontre, se possível, números reais x tais que*

$$(5^x)^{x+1} = 0,2.$$

Solução. Sabemos que $0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$. Logo, a equação dada é equivalente a $5^{x(x+1)} = 5^{-1}$. Igualando os expoentes, obtemos $x(x+1) = -1$, ou seja, $x^2 + x + 1 = 0$. Mas essa equação quadrática tem discriminente $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$, logo, não tem solução real. □

2 Algumas aplicações

A seguir, veremos que os exemplos 1 e 2 do material da aula *Funções exponenciais e suas propriedades* dão origem a equações exponenciais na base e. No que se segue, adotaremos a aproximação $2,71828$ para o número irracional e. Essa aproximação tem quatro casas decimais exatas.

Exemplo 8. *Uma colônia de bactérias tem, inicialmente, uma população de* 1000 *indivíduos. Após* 1 *minuto, a população cresceu para* 2718 *indivíduos. Estime qual é a população após* 2 *minutos.*

Solução. Na seção 4 da aula *Funções exponenciais e suas propriedades*, vimos que a função que rege o crescimento populacional de uma colônia de bactérias é dada por

$$P(t) = P_0 \cdot e^{Bt},$$

onde P_0 é a população inicial, B é uma constante positiva a ser determinada e $P(t)$ é a população no instante t.

Em nosso caso, estamos considerando o tempo t medido em minutos e temos $P_0 = 1000$, de forma que

$$P(1) = 2718 \Rightarrow 1000 \cdot e^{B \cdot 1} = 2718 \Rightarrow e^B = 2,718 \cong e.$$

Uma vez que pretendemos somente *estimar* $P(2)$ (e não calcular seu valor exato), podemos assumir que a última igualdade acima é $e^B = e$. Logo, $B = 1$ e, portanto,

$$P(t) = 1000 \cdot e^t.$$

Então, após 2 minutos, a população de bactérias é $P(2) = 1000 \cdot e^2$. Usando a aproximação

$$e^2 \cong 2,71828 \cdot 2,71828 \cong 7,389,$$

obtemos $P(2) \cong 1000 \cdot 7,389 = 7389$, ou seja, após dois minutos a população é de, aproximadamente, 7389 bactérias. □

Exemplo 9 (cf. sugestão de leitura complementar 3. p.97)**.** *A meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que metade da massa de um corpo formado por átomos desse elemento se desintegre. O carbono* 14*, indicado pelo símbolo C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono, cuja presença nos seres vivos permanece estável durante toda a vida, por conta da ingestão de novos átomos, mas começa a diminuir a partir do momento em que o ser morre. Esse fato é usado para estimar a idade de fósseis, ou de qualquer artefato feito de madeira, ossos, ou outras partes de seres vivos, uma vez que comprovou-se experimentalmente que a meia-vida do carbono* 14 *é de* 5570 *anos. Assumindo que a solução da equação $e^x = 2$ é aproximadamente* $0,6931$*, descreva um método que permita estimar a idade de um fóssil cuja massa de C^{14} é um* $1/100$ *da massa de C^{14} em um ser vivo.*

Solução. A solução do Exemplo 2 do material da aula *Funções exponenciais e suas propriedades*, vista na seção 4 da mesma, nos diz que a função que dá a massa $M(t)$ de um elemento radioativo após um tempo t é dada pela expressão

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-At}, \tag{1}$$

onde M_0 é a massa inicial e A é uma constante a ser determinada.

De acordo com os dados do problema, a meia-vida do C^{14} é 5570 anos, isto é, $M(5570) = \frac{M_0}{2}$. Substituindo essa relação em (1), juntamente com $t = 5570$, obtemos

$$\frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-5570A},$$

ou seja, $2^{-1} = e^{-5570A}$, que por sua vez equivale a $e^{5570A} = 2$.

O enunciado do problema também nos diz que a solução aproximada da equação $e^x = 2$ é $x = 0,6931$. Assim,

$$\begin{aligned} e^{5570A} = 2 &\Rightarrow 5570A \cong 0,6931 \\ &\Rightarrow A \cong \frac{0,6931}{5570} = 0,0001244. \end{aligned}$$

Queremos estimar um valor t tal que $M(t) = \frac{M_0}{100}$. Substituíndo em $M(t) = M_0 \cdot e^{-At}$, com $A = 0,0001244$, obtemos

$$e^{0,0001244t} = 100.$$

Como $e \cong 2,71828 < 3$, temos que $e^4 < 3^4 = 81 < 100$. Por outro lado, $e > 2,7$ implica

$$e^5 > (2,7)^5 = \left(\frac{27}{10}\right)^5 = \frac{3^{15}}{10^5} = \frac{14348907}{100000} > 100.$$

Portal da OBMEP

Assim, uma primeira estimativa é que $4 < 0,0001244t < 5$, o que nos fornece $32154 < t < 40192$. Mesmo com essa estimativa grosseira, já podemos concluir que o fóssil tem uma idade superior a 30 mil anos. $\square$

Observação 10. *Um dos dados do Exemplo 9 é que uma solução aproximada da equação $e^x = 2$ é $x = 0,6931$. Quando estudarmos logaritmos, veremos que o número $0,6931$ é um logaritmo. De qualquer modo, uma equação do tipo $e^x = 2$ não pode ser resolvida usando-se os métodos que estamos estudando nesta aula, porque não é possível reduzi-la a uma igualdade de potências de mesma base.*

Ainda em relação ao exemplo anterior, no final da solução somos forçados a fazer aproximações para estimar a solução da equação $e^{0,0001244t} = 100$. Novamente, isso se deve a não podermos reduzir tal equação a uma igualdade entre potências de mesma base.

3 Mais algumas técnicas

Nesta seção, veremos mais algumas técnicas para resolver equações exponenciais. A primeira delas é o que chamamos de *mudança de variáveis*.

Exemplo 11. *Resolva a equação*

$$3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x+1} + 3^3 = 0.$$

Solução. Podemos escrever a equação dada como $3^{2x} \cdot 3 - 10 \cdot 3^x \cdot 3 + 27 = 0$; dividindo por 3, obtemos

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Como $3^{2x} = (3^x)^2$, escrevendo $3^x = y$ transformamos a equação exponencial em x numa equação quadrática em y:

$$y^2 - 10y + 9 = 0.$$

Esta última equação tem soluções $y = 1$ ou $y = 9$. Uma vez que $3^x = y$, temos então que $3^x = 1 = 3^0$ ou $3^x = 9 = 3^2$, de onde concluímos que $x = 0$ ou $x = 2$ são as soluções reais da equação dada. $\square$

Exemplo 12. *Resolva a equação*

$$2^{2x-1} - 2^{x-1} - 2 = 2^x.$$

Solução. Assim como no Exemplo 11, a ideia aqui é fazer uma mudança de variável para transformar a equação exponencial em uma equação quadrática.

A equação dada pode ser reescrita como

$$(2^x)^2 \cdot 2^{-1} - 2^x \cdot 2^{-1} - 2 = 2^x.$$

Escrevendo $y = 2^x$, obtemos a equação quadrática $y^2 \cdot 2^{-1} - y \cdot 2^{-1} - 2 = y$. Multiplicando por 2, obtemos $y^2 - y - 4 = 2y$, ou seja,

$$y^2 - 3y - 4 = 0.$$

Esta equação tem soluções $y = -1$ ou $y = 4$. Como 2^x é sempre positivo para expoentes reais, a raiz $y = -1$ não fornece solução real da equação exponencial. Por outro lado, da raiz $y = 4$ vem que $2^x = 4 = 2^2$, logo, $x = 2$ é a única solução real da equação dada. $\square$

Exemplo 13. *Resolva a equação*

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 1,25.$$

Solução. Se escrevemos $y = 3^x$, então $3^{-x} = 1/y$. Além disso, $1,25 = \frac{5}{4}$. Mudando a variável de x para y na equação inicial, obtemos

$$\frac{y + 1/y}{y - 1/y} = \frac{5}{4},$$

ou seja,

$$\frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} = \frac{5}{4}.$$

Multiplicando em $\times$, segue que $4y^2 + 4 = 5y^2 - 5$, isto é, $y^2 = 9$. Então, $y = -3$ ou $y = 3$ e, como $3^x = -3$ é impossível, resta a igualdade $3^x = 3$, que nos fornece $x = 1$. $\square$

Exemplo 14 (cf. sugestão de leitura complementar 2). *Resolva a equação*

$$3^{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{81}{3^{x + \frac{1}{x}}}.$$

Solução. A mudança de variável a ser feita na equação dada é menos evidente: $y = x + \frac{1}{x}$. Realmente, elevando essa igualdade ao quadrado, obtemos

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

de forma que $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Substituindo na equação original, obtemos $3^{y^2-2} = \frac{81}{3^y}$. Assim, $3^{y^2-2} \cdot 3^y = 3^4$, ou seja, $3^{y^2+y-2} = 3^4$. Igualando os expoentes, obtemos $y^2 + y - 2 = 4$, que é equivalente a $y^2 + y - 6 = 0$. Essa equação tem soluções $y = 2$ ou $y = -3$.

Para $y = 2$, temos $x + \frac{1}{x} = 2$, que fornece a equação quadrática $x^2 - 2x + 1 = 0$, equivalente a $(x-1)^2 = 0$, que tem solução $x = 1$.

Para $y = -3$, temos $x + \frac{1}{x} = -3$, que fornece a equação quadrática $x^2 + 3x + 1 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$. Logo, as raízes dessa equação são $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Portanto, os números reais que satisfazem a equação dada são $1, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. $\square$

Portal da OBMEP

4 Dois exemplos mais difíceis

Nesta seção, estudaremos dois exemplos de equações exponenciais que não podem ser resolvidos usando-se as técnicas desenvolvidas nas seções anteriores.

Exemplo 15. *Encontre um valor aproximado para o número real x que satisfaz a equação*

$$10^x = 23.$$

Solução. Não é possível reduzir esta equação à igualdade entre duas potências de mesma base. Por outro lado, podemos estimar o valor de x lembrando que a função exponencial de base 10 é crescente. Assim, como $10 < 23 < 100$, temos que $10^1 < 10^x < 10^2$, logo $1 < x < 2$. Essa é uma primeira estimativa para a raiz da equação.

Para melhorarmos essa estimativa, consideremos o ponto médio $3/2 = \frac{1+2}{2}$ do intervalo $[1, 2]$. Temos: $10^{3/2} = 10\sqrt{10}$ e, como $9 < 10 < 16$, $3 < \sqrt{10} < 4$ e $30 < 10\sqrt{10} < 40$. Portanto, $10^x = 23 < 30 < 10^{3/2}$ e isso implica que $x < 3/2$. Com isso, obtemos uma nova estimativa, $1 < x < 3/2$.

Consideremos o ponto médio $5/4 = \frac{1+3/2}{2}$ do intervalo $[1, 3/2]$. Temos: $10^{5/4} = 10\sqrt[4]{10}$. Como $1 < 10 < 16$, temos que $1 < \sqrt[4]{10} < 2$ e $10 < 10\sqrt[4]{10} < 20$. Isso significa que $10^{5/4} = 10\sqrt[4]{10} < 20 < 23 = 10^x$, logo $5/4 < x < 3/2$ é nossa terceira estimativa para a raiz dessa equação.

A continuação desse processo nos levaria a aproximações cada vez melhores da raiz da equação. Nos contentaremos com a estimativa dada pelas desigualdades $5/4 < x < 3/2$.

O ponto médio desse intervalo é uma aproximação da raiz: $x \cong \frac{5/4+3/2}{2} = \frac{11}{8} = 1,375$. Comparando com a aproximação com três casas decimais exatas, $x \cong 1,361$, vemos que o valor que obtivemos é razoavelmente adequado. $\square$

Exemplo 16. *Mostre que a equação*

$$2^x = x^2$$

tem pelo menos três soluções reais.

Solução. Por inspeção, vemos que $x = 2$ e $x = 4$ são soluções da equação dada.

Para ver que há pelo menos uma solução a mais, note que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2^x - x^2$ é *contínua*, isto é, pequenas variações de x provocam pequenas variações de $f(x)$ (veja uma breve discussão sobre funções contínuas na aula *Funções exponenciais e suas propriedades*). Um número real r é solução da equação $2^x = x^2$ se, e somente se, $f(r) = 0$.

Como $f(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$ e $f(0) = 2^0 - 0^2 = 1 - 0 = 1 > 0$, podemos concluir que a função f muda de sinal no intervalo $[-1, 0]$. Como f é contínua, existe[1] um número real r entre -1 e 0, tal que $f(r) = 0$, ou seja, existe uma solução real da equação $2^x = x^2$ entre -1 e 0.

Quando estudarmos o gráfico da função exponenecial, poderemos justificar porque 2, 4 e a solução negativa são as únicas soluções da equação $2^x = x^2$. $\square$

[1] Aqui, estamos aplicando aqui o Teorema do Valor Intermediário; veja a Observação 3 da aula *Funções exponenciais e suas propriedades.*

Dicas para o Professor

A presente aula pode ser coberta em três ou quatro encontros de 50 minutos.

Aqui, exibimos apenas alguns exemplos de equações exponenciais elementares. Uma quantidade substancial de exercícios envolvendo essas equações pode ser encontrada na sugestão de leitura complementar 2.

Nos exemplos 9 e 15, temos equações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma igualdade entre potências de mesma base. Como ainda não estudamos logaritmos, tivemos de encontrar soluções aproximadas dessas equações. O método que usamos para resolver as equações daqueles exemplos, apesar de suas limitações, é esclarecedor, pois nos leva a encarar o problema de frente: enquanto escrever apenas $x = \ln 2$ ou $x = \log_{10} 23$ não esclarece que números são esses, o método que apresentamos aqui efetivamente calcula aproximações das soluções das equações envolvidas, portanto, valores aproximados dos logaritmos acima. Isso nos leva à conexão fundamental entre exponenciais e logaritmos: calcular um logaritmo é resolver uma equação exponencial, e calcular valores aproximados de um logaritmo é obter soluções aproximadas de uma equação exponencial equivalente.

Outras aplicações que envolvem equações exponenciais podem ser encontradas na sugestão de leitura complementar 3, capítulo 14.

Sugestões de Leitura Complementar

1. D. L. de Menezes. *Abecedário da Álgebra*, vol. 2, Ciclo Colegial. Rio de Janeiro, Departamento de Imprensa Nacional, 1956.
2. G. Iezzi, O. Dolce, C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 2, quarta edição. São Paulo, Ed. Atual, 1985.
3. E. L. Lima. *Logaritmos.* SBM, Rio de Janeiro, 1991.

Portal da OBMEP