Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas

Exercícios - Parte III

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Julho de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Conforme antecipado no material anterior, essa terceira parte explora exemplos que envolvem a noção de continuidade e orbitam em torno do teorema dos valores extremos.

1 Exemplos

Na penúltima aula, estudamos o teorema dos valores extremos: *se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua, então existem* $x_0, x_1 \in [a, b]$ *tais que*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

para todo $x \in [a, b]$*, ou seja, a função* f *assume valores máximo e mínimo no intervalo* $[a, b]$.

Em particular, toda função contínua definida em um intervalo do tipo $[a, b]$ é limitada.

Exemplo 1. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e periódica. Mostre que* f *é limitada.*

Solução. [1] Seja $T > 0$ um período de f.

Como vimos acima, a restrição da função f ao intervalo $[0, T]$ deve ser limitada, digamos, $|f(u)| \leq M$ para todo $u \in [0, T]$ e uma certa constante $M > 0$.

Afirmamos que $|f| \leq M$ em toda a reta. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$ arbitrário, escreva $x = u + nT$, com n inteiro e $u \in [0, T)$ (basta pôr $n = \lfloor x/T \rfloor$ e $u = x - nT$). Daí, o fato de T ser um período de f garante que

$$|f(x)| = |f(u + nT)| = |f(u)| \leq M,$$

o que prova a afirmação e encerra a demonstração. □

Para o próximo exemplo, fixado um vetor v no plano, a *translação* por v é a transformação T_v do plano no plano que a cada ponto A associa o único ponto $T_v(A) =: B$ satisfazendo $\overrightarrow{AB} = v$.

[1] Reveja a solução do exemplo 11 da aula anterior.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas no plano de modo que $P = (x, y)$ e $v = (a, b)$, não é difícil mostrar que [2]

$$T_v(x, y) = (x + a, y + b).$$

Exemplo 2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujo gráfico G_f é invariante por uma translação T_v, ou seja, $T_v(G_f) \subset G_f$. Se T_v for diferente da identidade (isto é, se $v \neq 0$), mostre que o limite*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

existe e é finito.

Solução. Conforme a discussão anterior, podemos supor que $T_v(x, y) = (x + a, y + b)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e certas constantes reais a e b.

Um ponto típico do gráfico de f é da forma $(x, f(x))$, para algum $x \in \mathbb{R}$. Como $T_v(x, f(x)) = (x + a, f(x) + b)$ deve ser um ponto do gráfico de f, a função deve satisfazer a equação funcional

$$f(x + a) = f(x) + b, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Sendo $v = (a, b)$ um vetor não nulo, temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Se tivéssemos $a = 0$, a relação $f(x + a) = f(x) + b$ implicaria $f(x) = f(x) + b$, logo, $b = 0$, o que é impossível. Portanto, $a \neq 0$.

Definindo a função contínua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\phi(x) = f(x) - bx/a$, segue da equação funcional satisfeita por f que

$$\begin{aligned}\phi(x + a) &= f(x + a) - \frac{b(x + a)}{a} \\ &= f(x) + b - \left(\frac{bx}{a} + b\right) \\ &= f(x) - \frac{bx}{a} = \phi(x).\end{aligned}$$

Logo, ϕ é uma função periódica.

[2] Confira a 2ª seção da aula *Vetores no Plano - Parte II.*

Pelo exemplo 1, ϕ é limitada, digamos, $|\phi| \leq M$, para uma certa constante positiva M. Assim,

$$-M \leq f(x) - \frac{bx}{a} \leq M,$$

implicando, para $x > 0$,

$$-\frac{M}{x} + \frac{b}{a} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{M}{x} + \frac{b}{a}.$$

Como

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{M}{x} + \frac{b}{a} \right) = \frac{b}{a} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{M}{x} + \frac{b}{a} \right),$$

o teorema do confronto garante que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a}.$$

□

Nosso próximo resultado é, de certo modo, uma generalização do exemplo 1.

Exemplo 3. *Sejam $g, h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se $h(x) > x$ para todo $x \geq 0$ (logo,* $\mathrm{Im}(h) \subset (0, +\infty)$*) e $(g \circ h)(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$, prove que g é limitada superiormente.*

Solução. Já observamos que

$$x < h(x), \quad \forall\, x \in [0, +\infty), \tag{1}$$

bem como

$$g(h(x)) \leq g(x) \tag{2}$$

para cada número real não negativo x.

Também, a desigualdade (1) implica $h(x) > 0$ para todo $x \geq 0$. Em particular, podemos substituir x por $h(0)$ em (1) para obter $h(0) < h(h(0))$. Mais geralmente, observando que

$h^{(n)}(0) > 0$ para todo natural n, uma repetição do argumento anterior permite obter a desigualdade

$$h^{(n)}(0) < h^{(n+1)}(0)$$

para cada n natural, de forma que $(h^{(n)}(0))_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente. Portanto, ela possui limite, digamos, L.

Afirmamos que $L = +\infty$. Caso contrário, L seria um número real positivo, de sorte que, pela continuidade de h,

$$\begin{aligned} h(L) &= h\big(\lim_{n\to\infty} h^{(n)}(0)\big) = \lim_{n\to\infty} h(h^{(n)}(0)) \\ &= \lim_{n\to\infty} h^{(n+1)}(0) = L. \end{aligned}$$

Todavia, a igualdade acima contradiz a relação (1).

Se M for o valor máximo de g restrita ao intervalo $[0, h(0)]$, afirmamos que $g(x) \leq M$ para todo $x \geq 0$. A demonstração dessa afirmação encerrará a solução.

De fato, como $\lim_{n\to\infty} h^{(n)}(0) = +\infty$, os intervalos justapostos

$$[0, h(0)), [h(0), h^{(2)}(0)), \ldots, [h^{(n)}(0), h^{(n+1)}(0)), \ldots$$

decompõem a semirreta $[0, +\infty)$, de sorte que um dado número real $x \geq 0$ pertence a exatamente um desses intervalos, digamos, $[h^{(m)}(0), h^{(m+1)}(0))$.

Observando que a imagem do intervalo $[0, h(0))$ por $h^{(m)}$ *contém* o intervalo $[h^{(m)}(0), h^{(m+1)}(0))$, existe $x_0 \in [0, h(0))$ tal que $h^{(m)}(x_0) = x$. Assim, de acordo com a desigualdade (2), vem que

$$\begin{aligned} g(x) &= g(h^{(m)}(x_0)) \leq g(h^{(m-1)}(x_0)) \\ &\leq \cdots \leq g(h(x_0)) \leq g(x_0) \leq M. \end{aligned}$$

□

Para o próximo exemplo, precisaremos da seguinte desigualdade:

$$\ln a \leq a - 1, \qquad (3)$$

válida para todo real $a > 0$. Isso pode ser justificado geometricamente; confira o exemplo 11 da última aula do módulo *Função Logarítmica*. Alternativamente, consulte o exemplo 12 da aula *Propriedades - Parte I*, no módulo *Derivada como Função*.

Substituindo a por e^x em (3), segue que

$$e^x \geq x + 1, \tag{4}$$

de modo que

$$e^x > x \text{ para cada } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Exemplo 4 (OBMU/2007, 2ª fase, Prob. 4). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(f(x)) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que, para todo n inteiro positivo,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = +\infty.$$

Solução. A demonstração será desenvolvida ao longo de seis afirmações.

`Afirmação 1`. f e exp comutam, ou seja, $f \circ \exp = \exp \circ f$.

Basta utilizar a associatividade da operação de composição de funções:

$$f \circ \exp = f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \exp \circ f.$$

`Afirmação 2`. Se $x = e^u$, então

$$\frac{f(x)}{x} = e^{f(u)-u}.$$

Segue por um cálculo direto, utilizando a Afirmação 1:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(e^u)}{e^u} = \frac{e^{f(u)}}{e^u} = e^{f(u)-u}.$$

`Afirmação 3`. $f(x) > x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, começamos notando que f não possui pontos fixos. Realmente, se tivéssemos $f(x) = x$ para algum real x, valeria

$$e^x = f(f(x)) = f(x) = x,$$

em contradição com (5).

Pelo exemplo 3 da aula anterior, devemos ter $f(x) < x$ ou $f(x) > x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se ocorresse o 1^{o} caso, obteríamos, substituindo u por $f(x)$ na desigualdade $f(u) < u$, $u \in \mathbb{R}$,

$$e^x = f(f(x)) < f(x) < x,$$

o que mais uma vez contradiz (5).

`Afirmação 4`. A função $g : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, definida por

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - x},$$

é limitada superiormente.

Estabeleçamos inicialmente que $(g \circ \exp)(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Uma vez feito isso, a afirmação seguirá do exemplo anterior, com $h = \exp$.

Para o que falta, utilizando a desigualdade (4), com $f(x) - x$ no lugar de x, a conclusão deve seguir da relação

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{f(x)}{x} - 1}.$$

De fato, com a Afirmação 2 em mente, temos, para $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} g(e^x) &= \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{f(x)-x} - 1} \\ &\leq \frac{1}{f(x) - x} = g(x), \end{aligned}$$

`Afirmação 5`.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

De acordo com a afirmação anterior, existe uma constante positiva K tal que $1/(f(x) - x) \leq 1/K$ para todo $x \geq 0$, ou seja,

$$f(x) - x \geq K \tag{6}$$

para todo $x \geq 0$.

Daí, segue que $\frac{f(x)}{x} \geq e^K$ para cada $x \geq 1$. Realmente, se $x \geq 1$, podemos escrever $x = e^u$ para algum $u \geq 0$. Logo, por (6) e pela segunda afirmação, temos

$$\frac{f(x)}{x} = e^{f(u)-u} \geq e^K.$$

Portanto, como

$$f(x) - x = x \cdot \left[\frac{f(x)}{x} - 1\right] \geq x \cdot (e^K - 1)$$

se $x \geq 1$, com $e^K - 1 > 0$, segue a igualdade

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = +\infty.$$

Desse modo, com a mudança de variável $x = e^u$, o limite anterior e a segunda afirmação implicam

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u \to +\infty} e^{f(u)-u} = +\infty,$$

conforme desejado.

`Afirmação 6`. Para n natural, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = +\infty.$$

Utilizaremos, mais uma vez, a mudança de variável $x = e^u$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} &= \lim_{u \to +\infty} \frac{f(e^u)}{e^{nu}} \\
&= \lim_{u \to +\infty} e^{f(u)-nu} \\
&= \lim_{u \to +\infty} e^{u \cdot \left(\frac{f(u)}{u} - n\right)} = +\infty,
\end{aligned}$$

pois, quando $u \to +\infty$, a Afirmação 5 garante que

$$u \cdot \left(\frac{f(u)}{u} - n\right) \to +\infty \cdot (+\infty - n) = +\infty.$$

$\square$

Solução'. Começaremos com duas observações, sendo a primeira delas a Afirmação 1 da demonstração anterior.

(1) f comuta com a exponencial, ou seja, $f \circ \exp = \exp \circ f$.

(2) f é injetiva, pois

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \\ &\Rightarrow e^x = e^y \Rightarrow x = y, \end{aligned}$$

uma vez que exp é injetiva.

A última observação, aliada à continuidade de f, garante, via exemplo 15 da aula anterior, a monotonicidade estrita dessa função. Mais precisamente, f é crescente, pois, caso contrário, f seria decrescente e a desigualdade (5) implicaria

$$e^{f(x)} = f(e^x) < f(x),$$

contradizendo (5).

Agora, seja $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função contínua definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Para concluir a solução, só precisamos mostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty. \tag{7}$$

Realmente, com a relação (7) estabelecida, obtemos, para cada natural n, a igualdade

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} (f(x) - nx) &= \lim_{x \to +\infty} x(g(x) - n) \\ &= +\infty \cdot (+\infty - n) = +\infty. \end{aligned}$$

Daí, com a mudança de variável $x = e^u$, vem que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} &= \lim_{u \to +\infty} \frac{f(e^u)}{(e^u)^n} \\ &= \lim_{u \to +\infty} \frac{e^{f(u)}}{e^{nu}} \\ &= \lim_{u \to +\infty} e^{f(u) - nu} = +\infty, \end{aligned}$$

pois $e^z \to +\infty$ quando $z \to +\infty$, e $z = f(u) - nu \to +\infty$ quando $u \to +\infty$.

Para provar (7), começamos por notar que $f(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, se fosse $f(x) \le x$ para algum x real, o fato de f ser crescente implicaria

$$e^x = f(f(x)) \le f(x) \le x,$$

contradizendo (5). Portanto, $g > 1$ e

$$K := \min_{2 \le u \le e^2} g(u)$$

é um número maior que 1, sendo a existência de K garantida pelo teorema dos valores extremos.

Agora, vejamos como uma estimativa do tipo $g \ge K$, sobre o intervalo $I = [2, e^2]$, permite uma estimativa "melhorada" sobre o intervalo $J = [e^2, e^{e^2}]$ (note que J é a imagem de I pela exponencial). De fato, se $x = e^u \in J$, $u \in I$, temos

$$\begin{aligned} g(x) = g(e^u) &= \frac{f(e^u)}{e^u} = \frac{e^{f(u)}}{e^u} \\ &= e^{f(u)-u} = (e^{g(u)-1})^u \\ &\ge (e^{K-1})^u \ge K^u \ge K^2, \end{aligned}$$

em que, nas duas últimas desigualdades, utilizamos (4) e o fato de que $K > 1$, $u \ge 2$.

Dessa forma, definindo indutivamente a sequência de intervalos justapostos $(I_n)_{n \ge 0}$ por

$$I_0 = [2, e^2],\ I_{n+1} = \exp(I_n),$$

a reunião dos intervalos I_n, com $n \ge m$, é a semirreta $[a_m, +\infty)$, sendo a_m o extremo inferior do intervalo I_m.

Além disso, o cálculo anterior permite estabelecer, por um simples argumento indutivo, a desigualdade

$$g(x) \ge K^{2^n},$$

para cada $x \in I_n$.

Então, observando que a sequência (K^{2^n}) é crescente e tem limite $+\infty$, pois $K > 1$, dado um real $M > 0$, vale $M < K^{2^{n_0}}$ para um certo natural n_0. Logo, $x > a_{n_0} \Rightarrow x \in I_n$, para algum $n \geq n_0$, de sorte que

$$x > a_{n_0} \Rightarrow g(x) \geq K^{2^n} \geq K^{2^{n_0}} > M,$$

o que, pela definição de limite, estabelece (7) e encerra a solução.

$\square$

O resultado que segue é conhecido na literatura como *lema do sol nascente* [3].

Exemplo 5 (IMC - 2011, Problema 1, 1º dia). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. $x \in \mathbb{R}$ é chamado* ponto de sombra *se existe $y > x$ tal que $f(y) > f(x)$. Sejam $a < b$ números reais e suponha que*

- *Cada ponto do intervalo (a, b) é um ponto de sombra.*
- *a e b* não *são pontos de sombra.*

Prove que

(a) $f(x) \leq f(b)$ para todo $a < x < b$;

(b) $f(a) = f(b)$.

Solução. Por definição, como a, b não são pontos de sombra, seguem as implicações

$$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a) \tag{8}$$

e

$$y > b \Rightarrow f(y) \leq f(b). \tag{9}$$

Em particular, $f(b) \leq f(a)$ por (8).

Fixado $x \in (a, b)$, seja x_0 um ponto de máximo da restrição $f|_{[x,b]}$. Afirmamos que $x_0 = b$ (em particular, b é ponto de máximo estrito de $f|_{[x,b]}$). Com efeito, se tivéssemos

[3] Confira o exercício 20 no capítulo 8 da referência [3].

$x_0 \in [x, b)$, então x_0 seria ponto de sombra, isto é, existiria $y > x_0$ tal que $f(y) > f(x_0)$. Como $f(b) \leq f(x_0)$, se fosse $y > b$, a implicação (9) permitiria escrever $f(y) \leq f(x_0)$, o que não é possível. Assim, devemos ter $y \in (x_0, b] \subset [x, b]$ e, daí, segue a relação $f(y) \leq f(x_0)$, pois x_0 é ponto de máximo de $f|_{[x,b]}$. Essa contradição garante que $x_0 = b$ é a única possibilidade.

O argumento no parágrafo anterior estabeleceu o seguinte fato: $f(x) < f(b)$ para todo $x \in (a, b)$. Isso demonstra a versão estrita da desigualdade no item (a). Para estabelecer o item (b), fazemos $x \to a^+$ na relação $f(x) < f(b)$, obtendo $f(a) \leq f(b)$, o que, juntamente a desigualdade $f(b) \leq f(a)$ obtida acima, permite a igualdade $f(a) = f(b)$. $\square$

Nosso último exemplo se mostrará útil quando tratarmos, em um módulo futuro, da *regra de l'Hôspital*.

Exemplo 6. *Sejam I um intervalo ilimitado superiormente e $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que*

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} = L, -\infty \leq L \leq +\infty$;

2. *g é crescente e* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Prove que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{10}$$

Solução. Não há perda de generalidade em supor $g(x) > 0$ para cada $x \in I$.

O texto que segue estabelece a fórmula (10) quando L é um número real, enquanto os casos $L = \pm\infty$ seguem de simples adaptações nos argumentos.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $A \in I$ um número real tal que

$$x \geq A \Rightarrow \left| \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ou seja, $x \geq A$ implica

$$(g(x+1)-g(x))(L-\varepsilon/2) < f(x+1)-f(x)$$

e

$$f(x+1)-f(x) < (g(x+1)-g(x))(L+\varepsilon/2).$$

Se, agora, $x \geq A+1$, escreva $x = x_0 + n$, em que n é um número natural e $x_0 \in [A, A+1)$ [4]. Daí, somando as n desigualdades

$$(g(x_0+k)-g(x_0+(k-1)))(L-\varepsilon/2) < f(x_0+k)-f(x_0+(k-1)),$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$, obtemos

$$(g(x_0+n)-g(x_0))(L-\varepsilon/2) < f(x_0+n)-f(x_0). \quad (11)$$

Analogamente, vale

$$f(x_0+n)-f(x_0) < (g(x_0+n)-g(x_0))(L+\varepsilon/2). \quad (12)$$

As desigualdades (11) e (12) se resumem a

$$L-\varepsilon/2 < \frac{f(x_0+n)-f(x_0)}{g(x_0+n)-g(x_0)} < L+\varepsilon/2,$$

ou melhor,

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - L\right| < \varepsilon/2.$$

Observando que $f(x)/g(x) - L$ se escreve como

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - L\right) + \frac{f(x_0)-g(x_0)\cdot L}{g(x)},$$

vemos que, se $x \geq A+1$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &\leq \frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x_0)-g(x_0)\cdot L}{g(x)}\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x_0)-g(x_0)\cdot L}{g(x)}\right|.\end{aligned}$$

[4] $n = \lfloor x - A \rfloor$ e $x_0 = x - n$.

Como $x_0 \in [A, A+1)$ e f, g são limitadas nesse intervalo (por que? [5]), o teorema do anulamento garante que a expressão

$$\left|\frac{f(x_0) - g(x_0) \cdot L}{g(x)}\right| = \frac{1}{g(x)} \cdot |f(x_0) - g(x_0) \cdot L|$$

tende a 0 quando $x \to +\infty$, já que $1/g(x) \to 0$ se $x \to +\infty$. Dessa forma, existe $B \geq A+1$ satisfazendo

$$x \geq B \Rightarrow \left|\frac{f(x_0) - g(x_0) \cdot L}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$x \geq B \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como desejado. □

Dicas para o Professor

Outros exemplos envolvendo aplicações interessantes do teorema dos valores extremos podem ser encontrados nas referências listadas adiante. Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo deste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. R. Gelca e T. Andreescu. *Putnam and Beyond*, 2ª ed. Springer Nature, Cham, 2017.

3. M. Spivak. *Calculus.* 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.

[5] Note que f, g são limitadas no intervalo $[A, A+1]$ pelo teorema de Weierstrass.