# Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 2 - Volumes e Áreas de Prismas e Pirâmides

## Volumes e o Princípio de Cavalieri

## Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto



PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

# 1 Volume

O volume de uma figura é uma medida do espaço que essa figura ocupa, ou seja, uma medida de seu *conteúdo*. Uma definição precisa de volume envolve noções de uma área da Matemática avançada chamada *Teoria da Medida*. Procurando manter a discussão em um nível elementar, nos limitaremos a exibir uma formalização de algumas das ideias de Euclides de Alexandria (sec.III aC) sobre volume, usando notação e nomenclatura modernas.

Como o leitor provavelmente já sabe, Euclides escreveu uma obra célebre chamada *Os Elementos*, dividida em treze livros (capítulos). Nesta aula, exibiremos alguns teoremas dos livros XI e XII dos *Elementos*.

Supõe-se que existe uma **função volume** $v$, que associa a cada figura $P$ no espaço um número $v(P)$ de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:

(i) $v(P) \geq 0$;

(ii) $v(P) = 0$ se $P$ está contida em algum plano;

(iii) Figuras congruentes têm o mesmo volume;

(iv) Se $P = P_1 \cup \cdots \cup P_n$ e, para $i \neq j$, $P_i \cap P_j$ está contido em um plano, então $v(P) = v(P_1) + \cdots + v(P_n)$;

(v) Se $P_1 \subset P_2$, então $v(P_1) \leq v(P_2)$;

(vi) Se $C$ é um cubo de aresta 1, então $v(C) = 1$.

Na definição acima é possível suprimir-se o item (v), pois este é uma consequência dos itens (i) e (iv). De fato, se $P_1 \subset P_2$, então $P_2 = P_1 \cup (P_2 \setminus P_1)$, onde $P_2 \setminus P_1$ é o conjunto dos pontos que estão em $P_2$ mas não em $P_1$. Aplicando sucessivamente os resultados dos itens (iv) e (i), obtemos

$$v(P_2) = v(P_1) + v(P_2 \setminus P_1) \geq v(P_1).$$

O teorema a seguir ilustra, em linguagem moderna, como os gregos lidavam com os números irracionais, usando um procedimento indireto conhecido como o *método da exaustão*. Segundo o próprio Euclides, esse método é devido ao astrônomo, filósofo e matemático grego Eudoxo de Cnido (408 aC - 355 aC), um membro da lendária Academia de Platão.

**Teorema 1.** *Se $B$ é um cubo de aresta $a$, então $v(B) = a^3$.*

**Prova.** Suponha primeiro que $a$ é um número racional, ou, na linguagem da época de Eudoxo, que $a$ é *comensurável* com a aresta do cubo unitário $C$. Isso significa que existe um número real $u$ tal que $mu = 1$ e $nu = a$. Logo, particionando cada aresta de $C$ em $m$ partes iguais, dividimo-lo em $m^3$ cubos congruentes, todos de aresta $u$. Se $V_0$ é o volume de cada um desses cubos, então $m^3V_0 = 1$, ou seja, $V_0 = \frac{1}{m^3}$.

Da mesma forma, é possível particionar o cubo $B$ (de aresta $a$) em $n^3$ cubos de aresta $u$, todos congruentes e todos com volume igual a $V_0$. Dessa forma,

$$v(B) = n^3V_0 = n^3 \cdot \frac{1}{m^3} = \left(\frac{n}{m}\right)^3 = a^3.$$

Se $a$ não é racional, deve-se usar o método da exaustão, que funciona da seguinte forma. Primeiramente, para cada $n$ natural, existe $m$ natural tal que

$$\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}.$$

Observa-se que $a - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$ e $\frac{m+1}{n} - a < \frac{1}{n}$. Assim, $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ são aproximações *por falta* e *por excesso* de $a$, respectivamente, cujas precisões são controladas por $n$: quanto maior o valor de $n$, melhor são tais aproximações.

Como $\frac{m}{n} < a$, o cubo $B_n$ de aresta $\frac{m}{n}$ está contido em $B$, logo,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 = v(B_n) \leq v(B).$$

De modo análogo, o cubo $B'_n$, de aresta $\frac{m+1}{n}$, contém $B$, logo,

$$v(B) \leq v(B'_n) = \left(\frac{m+1}{n}\right)^3.$$

Segue do raciocínio acima que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 \leq V(B) \leq \left(\frac{m+1}{n}\right)^3.$$

Por outro lado, $\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$ também implica

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 < a^3 < \left(\frac{m+1}{n}\right)^3,$$

de forma que

$$\begin{aligned} |V(B) - a^3| &\leq \left(\frac{m+1}{n}\right)^3 - \left(\frac{m}{n}\right)^3 \\ &= \frac{3m^2 + 3m + 1}{n^3} < \frac{9m^2}{n^3}. \end{aligned}$$

Mas, como $3m^2 + 3m + 1 < 9m^2$ e $m < na$, segue dos cálculos acima que

$$|V(B) - a^3| < \frac{9m^2}{n^3} < \frac{9(na)^2}{n^3} = \frac{9a^2}{n}.$$

Se $V(B) \neq a^3$, então $|V(B) - a^3| > 0$. Então, essa última igualdade equivale a

$$n < \frac{9a^2}{|V(B) - a^3|}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Isso é claramente um absurdo, uma vez que podemos escolher um natural maior que $\frac{9a^2}{|V(B)-a^3|}$. Logo, devemos ter $V(B) = a^3$. □

A prova acima pode ser adaptada *mutatis mutandis*[1] para se demonstrar o resultado a seguir. Convém lembrar que um paralelepípedo é um prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos. No caso em que as bases são retângulos e as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, o paralelogramo é chamado reto retângulo.

**Teorema 2.** *Se $P$ é um paralelepípedo reto retângulo de arestas $a$, $b$ e $c$, então $v(P) = abc$.*

O próximo passo é calcular o volume de um paralelepípedo qualquer.

**Teorema 3** (Elementos, XI-28)**.** *Um paralelepípedo é cortado ao meio pelo plano que passa por duas de suas arestas opostas.*

**Prova.** Nas notações da figura 1, deve-se mostrar que os prismas $ABEDCH$ e $GCHFBE$ são congruentes.

Sendo faces opostas de um mesmo paralelepípedo, os paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ são congruentes, o mesmo ocorrendo com os paralelogramos $ADHE$ e $BCGF$. A diagonal $EB$ divide o paralelogramo $ABFE$ em dois triângulos congruentes: $ABE$ e $FBE$, o mesmo ocorrendo em relação à diagonal $CH$, que divide o paralelogramo $CDHG$ em dois triângulos congruentes: $CDH$ e $CGH$.

Os dois prismas em questão têm ainda uma face em comum, o paralelogramo $BCHE$. São, portanto, congruentes e, em particular, têm o mesmo volume. $\square$

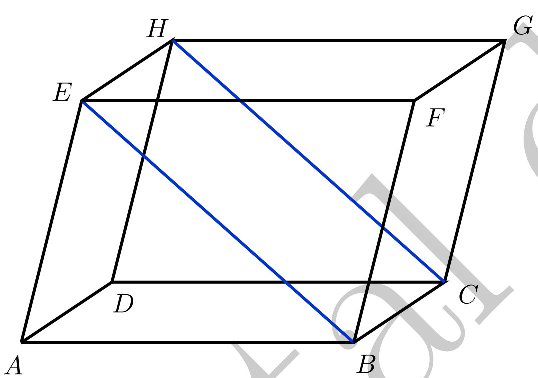


Figura 1: um plano dividindo um paralelepípedo ao meio.

A bem da clareza do enunciado do próximo resultado, sugerimos ao leitor olhar a figura 2, na qual consideraremos os paralelepípedos que têm o paralelogramo $ABCD$ como base comum e os paralelogramos $EFGH$ e $IJKL$ como bases opostas.

**Teorema 4** (Elementos, XI-29)**.** *Paralelepípedos que têm a mesma base, a mesma altura e tais que as extremidades das arestas laterais são pontos colineares, têm o mesmo volume.*

[1]Expressão latina que significa *mudando o que precisa ser mudado.*

**Prova.** Comparando os lados de paralelogramos que são faces dos paralelepípedos dados, obtemos as seguintes igualdades:

$$\overline{IJ} = \overline{AB} = \overline{EF}, \ \ \overline{LK} = \overline{CD} = \overline{GH}.$$

Valem ainda as igualdades:

$$\overline{IE} = \overline{IJ} - \overline{EJ} = \overline{EF} - \overline{EJ} = \overline{JF},$$

$$\overline{LH} = \overline{LK} - \overline{HK} = \overline{GH} - \overline{HK} = \overline{KG}.$$

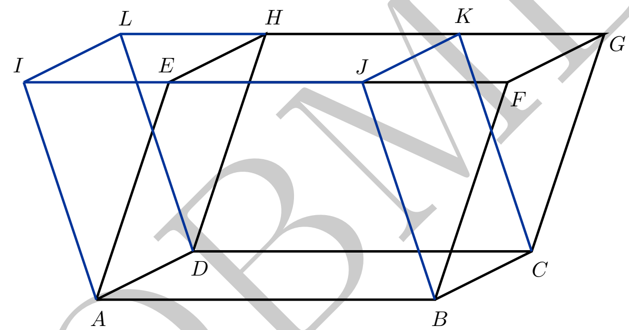


Figura 2: dois paralelepípedos com mesma base e com os "topos" alinhados.

Os paralelogramos $ADHE$ e $BCGF$ são congruentes, assim como o são os paralelogramos $ADLI$ e $BCKJ$. Juntando todas essas informações, vemos que os prismas $AEIDHL$ e $BFJCGK$ são congruentes; em particular têm o mesmo volume $V$. Dessa forma, se $V_0$ é o volume do sólido $ABCDEJKH$, então os dois paralelepípedos que estamos considerando têm volume igual a $V + V_0$. $\square$

**Teorema 5** (Elementos, XI-30)**.** *Paralelepípedos que têm a mesma base e a mesma altura têm o mesmo volume.*

**Prova.** Observando a figura 3, percebe-se que o paralelepípedo azul tem o mesmo volume que o paralelepípedo vermelho, devido ao Teorema 4. O mesmo vale para os paralelepípedos verde e vermelho. Assim, os paralelepípedos verde e azul têm o mesmo volume. $\square$

Para o que segue, dizemos que duas figuras são **equidecomponíveis** se for possível dividir uma delas em um número finito de partes, que, reorganizadas, resultam exatamente na outra.

Na demonstração do próximo teorema, utilizaremos sem demonstração o seguinte resultado da geometria plana, conhecido como Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien[2]:

[2]Após William Wallace (1768-1843), Farkas Bolyai (1775-1856) e Paul Gerwien. O resultado é mais geral: vale para quaisquer dois polígonos simples.

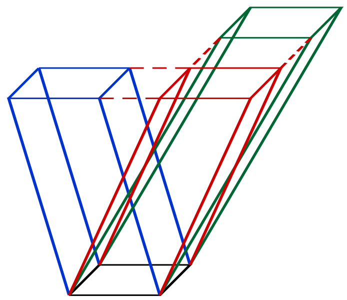

Figura 3: comparando três paralelepípedos com bases iguais.

*Dois paralelogramos têm a mesma área se, e somente se, são equidecomponíveis.*

**Teorema 6** (Elementos, XI-31). *Paralelepípedos que têm a mesma altura e bases com a mesma área têm o mesmo volume.*

**Prova.** Sejam $P_1$ e $P_2$ os dois paralelepípedos em questão. As bases $B_1$ e $B_2$ de $P_1$ e $P_2$, respectivamente, são paralelogramos que supomos terem a mesma área.

Substituindo $P_1$ ou $P_2$, se necessário, por paralelepípedos retângulos com a mesma base e a mesma altura, pode-se supor que os dois paralelepípedos dados são retângulos.

Agora, como $B_1$ e $B_2$ têm a mesma área, são equidecomponíveis. Mais precisamente, é possível escrever $B_1 = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ como união de $n$ partes disjuntas, de modo que $B_2 = C_1 \cup \cdots \cup C_n$.


Figura 4: as duas bases $B_1$ e $B_2$ têm a mesma área.

Tais decomposições de $B_1$ e $B_2$ induzem decomposições naturais de $P_1$ e $P_2$ em paralelepípedos retângulos $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$, tais que $P_1 = \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_n$ e $P_2 = \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_n$, sendo que, para $i \neq j$, os paralelepípedos $\Pi_i$ e $\Pi_j$ têm exatamente uma face em comum. Em particular, $P_1$ e $P_2$ têm o mesmo volume. □

**Corolário 7.** *O volume de um prisma é igual à área de sua base multiplicada por sua altura.*

**Prova.** Sejam $P$ o prisma dado, $B$ sua base e $B'$ um paralelogramo de mesma área que $B$. Seja $P'$ um paralelepípedo de base $B'$ e mesma altura que $P$. Pelo Teorema 6, o volume de $P$ é igual ao volume de $P'$, que por sua vez é igual ao produto da área de $B'$ (que é igual à área de $B$) pela altura de $P'$ (que é igual à altura de $P$). □

O próximo passo é o cálculo do volume de uma pirâmide. De início, precisamos de um resultado análogo ao Teorema 6. Ao contrário do que ocorre com paralelepípedos, para a comparararação entre os volumes de duas pirâmides de mesma altura e cujas bases têm a mesma área, Euclides não usa equidecomposição, mas o princípio de Eudoxo (isto é, o método da exaustão).

**Teorema 8** (Elementos, XII-5). *Pirâmides triangulares de mesma altura e cujas bases têm mesma área têm, necessariamente, o mesmo volume.*

**Prova.** Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ duas pirâmides de mesma altura, cujas bases $BCD$ e $B'C'D'$ têm a mesma área. Sejam $E, F, G, H, J, K$ os pontos médios das arestas de $ABCD$ (veja a figura 5).

A pirâmide $ABCD$ pode ser decomposta em quatro partes: as pirâmides menores $P_1 = AEFG$ e $P_2 = FBKH$ (que são congruentes e cujas arestas medem metade das arestas correspondentes em $ABCD$) e dois prismas triangulares $T_1 = EFGCHJ$ e $T_2 = DGJKFH$. O prisma $T_1$ está "em pé" enquanto o prisma $T_2$ está "deitado" sobre uma de suas faces laterais, qual seja, o paralelogramo $DJHK$, cuja área é igual ao dobro da área do triângulo $CHJ$ (pois o segmento $JK$ divide o paralelogramo $DKHK$ em dois triângulos congruentes a $CHJ$).

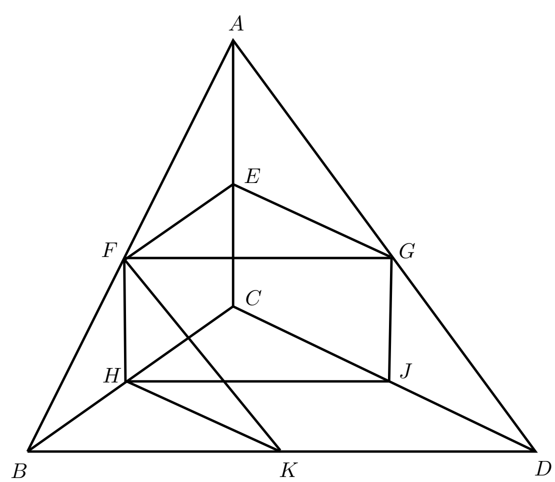


Figura 5: decomposição de uma pirâmide triangular.

Se ao prisma $T_2$ ajuntarmos outro prisma $\tilde{T}_2$ congruente a $T_2$, como na figura 6, obtemos um paralelepípedo cujo volume é o dobro do volume de $T_2$ e também é o dobro do volume de $T_1$, pois tem a mesma altura que $T_1$ e sua base tem área igual ao dobro da área da base de $T_1$. Dessa forma, $T_1$ e $T_2$ têm o mesmo volume[3].

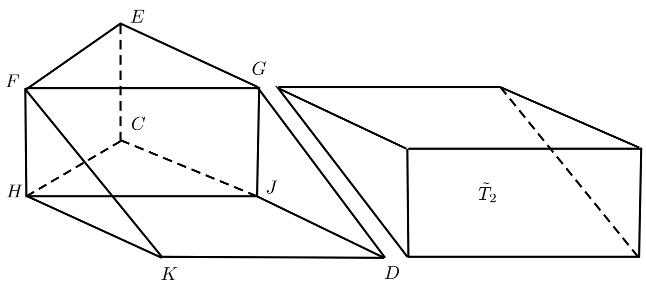


Figura 6: comparação entre as áreas dos prismas $T_1$ e $T_2$.

Mais ainda, como $P_1$ e $T_1$ têm a mesma base $EFG$ e a mesma altura, o volume de $T_1$ é maior do que o volume de $P_1$, pois $T_1$ é um prisma, enquanto $P_1$ é uma pirâmide. Assim, a união $T_1 \cup T_2$ dos dois prismas possui volume maior do que a metade do volume da pirâmide $ABCD$.

Evidentemente, é possível fazermos uma decomposição análoga para a pirâmide $A'B'C'D'$, dividindo-a em duas pirâmides menores $P_1'$ e $P_2'$, congruentes, e dois prismas $T_1'$ e $T_2'$, de modo que o volume de $T_1' \cup T_2'$ seja maior do que a metade do volume de $A'B'C'D'$.

Uma vez que as bases das pirâmides $ABCD$ e $A'B'C'D'$ têm a mesma área, os prismas (de mesma altura) $T_1, T_2, T_1'$ e $T_2'$ têm o mesmo volume (Teorema 6). Ademais, as pirâmides que sobram $P_1, P_2$ e $P_1', P_2'$ têm bases com a mesma área.

É possível, então, repetir esse procedimento indutivamente, dividindo as pirâmides menores da mesma forma, de modo que mais do que a metade de seus volumes seja coberta pela união de dois prismas. Além disso, a cada repetição desse processo, a parte *residual* nas duas pirâmides originais, ou seja, a parte que corresponde a uma possível diferença entre os volumes iniciais, é dividida por 2.

Sejam $V$ e $V'$ os volumes das pirâmides $ABCD$ e $A'B'C'D'$, respectivamente. Se $V > V'$, então $V - V' > 0$. É possível repetir o procedimento descrito acima um número finito de vezes de tal modo que a parte residual em cada pirâmide tenha volume menor do que $V - V'$, o que é um absurdo, pois a diferença $V - V'$ é exatamente a diferença entre as partes residuais das decomposições nas duas pirâmides.

De modo análogo, a hipótese $V' > V$ conduz a uma contradição. Logo, $V = V'$. $\square$

**Corolário 9** (Elementos, XII-7). *Uma pirâmide triangular tem volume igual a um terço do volume de um prisma triangular de mesma base e mesma altura.*

[3]Essa é a conclusão da Proposição 39 do livro XI dos Elementos.

**Prova.** Seja $P$ a pirâmide triangular $DEFB$ e seja $T$ o prisma triangular $ABCDEF$, com mesma base e mesma altura que $P$ (veja a figura 7).

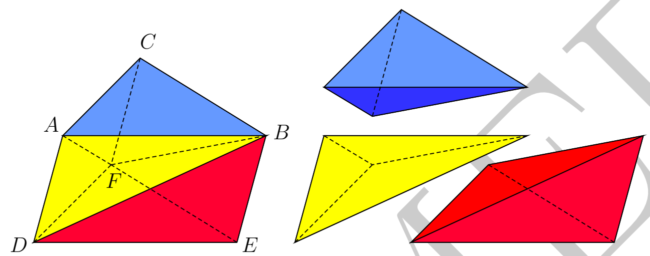


Figura 7: partição de um prisma em três pirâmides.

O prisma $T$ pode ser dividido em três pirâmides, $P$, $P_1 = ABCF$ e $P_2 = ABDF$. Essas três pirâmides têm o mesmo volume. De fato, as pirâmides $P$ e $P_1$ têm a mesma altura e suas bases, os triângulos $ABC$ e $DEF$, são congruentes; logo, podemos aplicar o Teorema 8 para concluir que $v(P) = v(P_1)$. Por outro lado, a distância do ponto $F$ ao plano que contém o paralelogramo $ABED$ pode ser considerada como altura comum das pirâmides $P$ e $P_2$. Essas duas pirâmides têm bases $ABD$ e $BDE$, que são triângulos congruentes, obtidos dividindo-se o paralelogramo $ABED$ pela diagonal $BD$. Assim, o Teorema 8 garante novamente que $v(P) = v(P_2)$.

Dessa forma, $v(P) + v(P_1) + v(P_2) = v(T)$ e $v(P) = v(P_1) = v(P_2)$ implicam $v(P) = \frac{1}{3} \cdot v(T)$. $\square$

## 2 O princípio de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) nasceu em Milão, onde recebeu o nome Francesco Cavalieri. Ao juntar-se à ordem dos jesuítas, em 20 de setembro de 1615, adotou o nome *Bonaventura*. Em 1616 foi transferido para a cidade de Pisa, onde mais tarde conheceu Galileu Galilei, tornando-se um de seus discípulos. Em 1635, publicou a *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota* (Um Certo Método para o Desenvolvimento de uma Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos), onde aparece o princípio famoso que leva seu nome.

Para o enunciado do mesmo, consideremos dois sólidos $A$ e $B$ e um plano fixado $\alpha$. Dado um plano $\beta$, paralelo a $\alpha$, sejam $a(\beta)$ e $b(\beta)$ as áreas das figuras $A \cap \beta$ e $B \cap \beta$, respectivamente. Convencionamos considerar $a(\beta) = 0$ quando $A \cap \beta$ for vazio ou um ponto, o mesmo valendo para $b(\beta)$; em geral, $a(\beta) \geq 0$ e $b(\beta) \geq 0$

No que segue, enunciamos o Princípio de Cavalieri e apresentamos um argumento intuitivo para sua validade. Observe que, ao longo do mesmo, utilizamos o fato de que o volume de um cilindro reto de altura $h$ e cuja base é uma região plana de área $A$ é igual a $Ah$. Para uma demonstração, veja a referência [1].

**Teorema 10** (Princípio de Cavalieri, 1635). *Sejam $A$, $B$ e $\alpha$ como descritos acima. Se $a(\beta) = b(\beta)$ para cada plano $\beta$ paralelo a $\alpha$, então $v(A) = v(B)$.*

**"Prova".** Sejam $\beta_0$, $\ldots$, $\beta_n$ planos paralelos a $\alpha$ e, portanto, paralelos entre si, satisfazendo as seguintes condições (veja a figura 8):

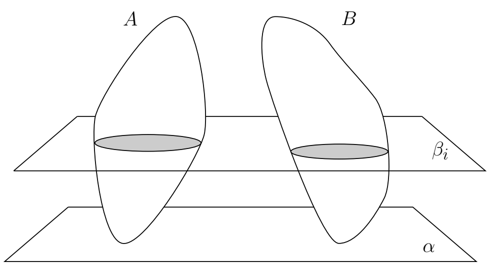


Figura 8: dois sólidos satisfazendo as hipóteses do Princípio de Cavalieri.

1. Para $i = 0$ e $i = n$, temos que $\beta_i \cap A$ e $\beta_i \cap B$ são pontos, isto é, $\beta_0$ e $\beta_n$ são tangentes a $A$ e a $B$.

2. A distância entre dois planos consecutivos $\beta_i$ e $\beta_{i+1}$ é $\delta = \frac{h}{n}$, onde $h$ é a distância entre os planos $\beta_0$ e $\beta_n$.

Para $0 \leq i \leq n-1$, a parte do sólido $A$ compreendida entre os planos $\beta_i$ e $\beta_{i+1}$ tem volume aproximadamente igual a $a(\beta_i)\delta$. A soma dos volumes dessas "fatias finas" é aproximadamente igual ao volume $v(A)$ do sólido $A$ e essa aproximação se torna mais precisa à medida que aumentamos a quantidade $n$ de fatias. O mesmo pode ser feito para o sólido $B$.

Dessa forma, dado um erro $\varepsilon > 0$, existe um natural $n$ suficientemente grande tal que

$$\left| v(A) - \sum_{i=0}^{n-1} a(\beta_i)\delta \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\left| v(B) - \sum_{i=0}^{n-1} b(\beta_i)\delta \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observe agora que, por hipótese, temos $a(\beta_i) = b(\beta_i)$ para $0 \leq i \leq n-1$, de modo que

$$\sum_{i=0}^{n-1} a(\beta_i)\delta = \sum_{i=0}^{n-1} b(\beta_i)\delta.$$

Portanto, aplicando a desigualdade triangular para números reais[4], obtemos

$$\begin{aligned} |v(A) - v(B)| &= \left| v(A) - \sum_{i=0}^{n} a(\beta_i)\delta + v(B) - \sum_{i=0}^{n} b(\beta_i)\delta \right| \\ &\leq \left| v(A) - \sum_{i=0}^{n} a(\beta_i)\delta \right| + \left| v(B) - \sum_{i=0}^{n} b(\beta_i)\delta \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Supondo que $v(A) \neq v(B)$, seja $\varepsilon = |v(A) - v(B)| > 0$. Então, os cálculos acima nos dariam

$$|v(A) - v(B)| < \varepsilon = |v(A) - v(B)|,$$

o que é um absurdo! Logo, $v(A) = v(B)$. $\square$

Uma aplicação muito interessante (e importante) do Princípio de Cavalieri é a dedução, apresentada a seguir, da fórmula para o volume de uma esfera. Para tal utilizaremos, também sem demonstração, o fato de que o volume de um cone circular reto de área da base $A$ e altura $h$ é igual a $\frac{1}{3}Ah$ (tal fórmula pode ser obtida com o auxílio do princípio de Cavalieri, comparando o cone com uma pirâmide triangular de área da base $A$ e altura $h$. Para mais detalhes, veja a referência [1]).

A ideia é comparar a esfera com um outro sólido, chamado *anti-clépsidra*, cujo volume é conhecido. Para tanto, consideramos uma esfera $S$ de raio $R$ e um cilindro $C$, com raio da base também igual a $R$ e cuja altura é igual ao diâmetro $2R$ da esfera $S$. No interior desse cilindro, tomamos dois cones de altura $R$, cujas bases são círculos de raio $R$, posicionados de modo que seus vértices se toquem (figura 9). O sólido interior ao cilindro e exterior aos dois cones é chamado **anti-clépsidra**.

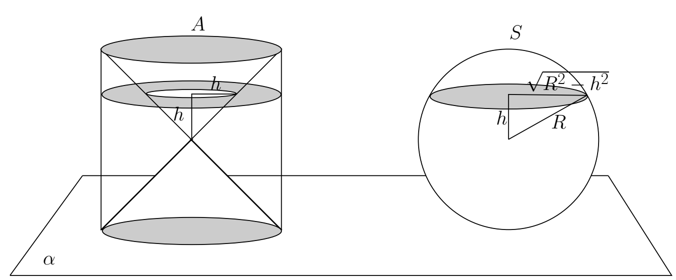


Figura 9: a esfera e a anti-clépsidra.

Supondo a esfera $S$ e a anti-clépsidra $A$ apoiados sobre um plano $\alpha$, seja $\beta$ um plano paralelo a $\alpha$, cuja distância até o centro de $S$ é igual a $h$.

[4] Recorde que tal desigualdade diz que $|x + y| \leq |x| + |y|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

É imediato verificar que $A \cap \beta$ é uma coroa circular de raios $h$ e $R$, ao passo que $S \cap \beta$ é um círculo de raio $\sqrt{R^2 - h^2}$. Portanto, denotando por $a(\beta)$ e $s(\beta)$ as áreas de $A \cap \beta$ e $S \cap \beta$, respectivamente, temos

$$a(\beta) = \pi R^2 - \pi h^2$$

e

$$s(\beta) = \pi \left(\sqrt{R^2 - h^2}\right)^2 = \pi(R^2 - h^2).$$

Assim, $a(\beta) = s(\beta)$ para qualquer plano $\beta$ paralelo a $\alpha$. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri o volume $v(S)$ da esfera é igual ao volume $v(A)$ da anti-clépsidra. Mas, uma vez que esse último volume é igual ao volume do cilindro $C$ menos o dobro do volume de um dos cones retirados de $C$ para formar $A$, temos

$$\begin{aligned} v(S) &= v(A) = \pi R^2 \cdot (2R) - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \\ &= 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

## Dicas para o Professor

Quatro encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula. Caso você queira evitar o uso do princípio de Eudoxo, pode fazer no Teorema 1 apenas o caso em que a aresta tem medida racional, bem como pode simplesmente enunciar o Teorema 8.

A necessidade do emprego do método da exaustão na demonstração da Proposição XII-5 dos *Elementos* foi questionada por K. F. Gauss (1777-1855) em uma carta escrita para Gerling em 1844. Em 1900, o eminente matemático alemão David Hilbert (1862-1943) colocou essa questão como o terceiro problema de sua famosa lista de 23 problemas, apresentados no segundo Congresso Internacional de Matemáticos em Paris e conhecidos como os Problemas de Hilbert. Esse Terceiro Problema de Hilbert, foi resolvido ainda em 1900 por um de seus alunos, Max Dehn. A conclusão de Dehn é que não é possível estender para sólidos quaisquer o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, ou seja, dois sólidos podem ter o mesmo volume sem serem equidecomponíveis. Isso torna realmente necessário o uso do princípio de Eudoxo na demonstração da Proposição XII-5, como fez Euclides. Você pode usar este material como motivação para o estudo do Terceiro Problema de Hilbert e consultar as sugestões de leitura complementar 3 e 4 para obter mais detalhes.

O Princípio de Cavalieri pode ser usado como alternativa para a obtenção do volume de prismas. Essa ideia foi explorada nas vídeo-aulas. Para o cálculo do volume da esfera é necessário que o aluno já conheça as fórmulas dos volumes do cilindro e do cone, que podem ser apresentadas como análogas das fórmulas para os volumes de prismas e pirâmides.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2014.
2. Euclides. *Os Elementos*, trad. Irineu Bicudo. São Paulo, Ed. Unesp, 2009.
3. R. Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*. Nova Iorque, Springer, 2000.
4. M.Aigner e G.M.Ziegler. *As Provas Estão n'O Livro*. São Paulo, Edgard Blucher, 2016.