Material Teórico - Módulo de MATEMÁTICA FINANCEIRA

Juros Simples e Compostos

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Autor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

20 de maio de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

No material anterior, introduzimos o conceito de juros tratando sobre a venda do violão do Josimar. Vimos que Josimar estava disposto a vender seu violão a vista por 100 reais, ou por 110 reais que poderiam ser pagos apenas no mês seguinte. Agora, imagine uma situação na qual o comprador do violão pede dois meses de prazo para pagar o valor do mesmo. Quanto Josimar deve cobrar neste caso? A princípio, ele poderia escolher qualquer valor arbitrário. Por outro lado, existem dois procedimentos padrão usuais que ele pode adotar:

(i) Cobrar mais 10 reais e pedir 120 reais por uma espera de dois meses.

(ii) Cobrar mais 11 reais e pedir 121 reais por uma espera de dois meses.

No primeiro caso, dizemos que Josimar está utilizando **juros simples** de 10% sobre o valor inicial. Segundo esta regra, os juros de 10% ao mês podem ser interpretados como uma *multa* pelo não pagamento do valor à vista. Portanto, a cada mês é acrescentada uma nova multa.

No segundo caso, dizemos que Josimar está utilizando **juros compostos** de 10% sobre o valor inicial. Segundo esta regra, os juros de 10% devem ser cobrados sobre o valor de 110 reais, pois é este o valor que deveria ser pago ao final do primeiro mês. Em outras palavras, podemos interpretar como se Paulo (o comprador do violão de Josimar) tivesse que fazer um novo empréstimo de 110 reais no final do primeiro mês.

Nas próximas seções, abordaremos problemas em que uma certa quantidade de dinheiro (capital) é investida durante determinado período de tempo.

2 Capitalização com juros simples

No regime de juros simples (também conhecido como juros lineares), se i é a taxa de juros por unidade de tempo (dia, mês, ano) e n é o número de períodos (unidades de tempo) que durou a aplicação, temos a seguinte relação entre o **valor final** VF e o **valor inicial** VI (também chamado **valor presente**):

$$VF = (1 + i \cdot n) \cdot VI. \tag{1}$$

Podemos deduzir a fórmula 1 através do seguinte raciocínio: Seja VF_1 o valor do capital após o primeiro período, VF_2 após o segundo período e assim por diante. Sabemos que

$$VF_1 = VI + i \cdot VI$$

$$VF_2 = VF_1 + i \cdot VI$$

$$VF_3 = VF_2 + i \cdot VI$$

$$\vdots$$

$$VF_n = VF_{n-1} + i \cdot VI$$

Somando todas estas igualdades, os termos intermediários $VF_1, ..., VF_{n-1}$ desaparecem, enquanto que o termo $i \cdot VI$ é somado n vezes. Ao final, chegamos à igualdade (1). Perceba também que a sequêcia formada pelos termos $VF_1, ..., VF_{n-1}$ é uma progressão aritmética.

Em diversos textos didáticos, o valor final VF também é chamado de **montante** e representado pela letra M, enquanto que o valor inicial VI também é chamado de **capital**, sendo representado pela letra C.

Ainda em relação a (1), é importante fazermos duas observações:

(i) Para utilizar tal fórmula, a taxa de juros simples devem ser dadas em *forma decimal*, i.e. sem o uso de porcentagens (%).

(ii) As medidas de tempo t e de taxa de juros i devem ser correspondentes; por exemplo, se o tempo for dado em anos, a taxa de juros simples também deve ser anual.

Em geral, usamos abreviaturas para representar as diferentes periodicidades de taxas de juros (veja a Tabela 1).

Tabela 1: abreviaturas mais utilizadas.

Abreviatura	Significado
a.d.	ao dia
a.m.	ao mês
a.b.	ao bimestre
a.t.	ao trimestre
a.s.	ao semestre
a.a.	ao ano

Além disso, como a quantidade de dias nos diferentes meses não é constante, convencionou-se que, ao resolver exercícios sobre Matemática Financeira, devemos considerar o mês com 30 dias e o ano com 360 dias, exceto quando for mencionado algum valor diferente.

Agora, a fim de exercitar os conceitos e convenções acima, analisemos alguns exemplos.

Exemplo 1. *Um cliente de um banco aplicou* 100 *reais a uma taxa simples de juros de* 2% *a.m., ao longo de três meses. Qual será o valor resgatado ao final da aplicação?*

Solução. Uma maneira de resolver o exemplo é calcular mês a mês os valores devidos pelo banco ao cliente:

- Ao final do primeiro mês, o banco deve acrescentar, ao valor inicial de 100 reais, 2 reais de juros (que correspondem a 2% de 100), totalizando 102 reais.
- Ao final do segundo mês, acrescenta-se mais dois reais, totalizando 104 reais.
- Ao final do terceiro mês, acrescenta-se mais dois reais, totalizando 106 reais.

Outra solução possível é baseada na aplicação direta da fórmula de juros simples (1). A fim de podermos utilizá-la, observe que o valor inicial é $VI = 100$, a taxa de juros é $i = 2\% = 0,02$ e o número de períodos é $t = 3$ meses. Portanto,

$$\begin{aligned} VF &= (1 + 0,02 \cdot 3) \cdot 100 \\ &= 1,06 \cdot 100 = 106. \end{aligned}$$

□

Note que (1) estabelece uma relação entre quatro variáveis: o valor inicial VI, o valor futuro VF, a taxa de juros i e o tempo de aplicação. Dessa forma, sabendo três destes quatro valores, é possível determinar o quarto. Os próximos três exemplos ilustrarão essa observação.

Exemplo 2. *Um capital de* 230 *reais foi aplicado por cinco meses no regime de juros simples, a uma taxa desconhecida* i *de juros. Após este período, foi resgatado um montante* 250 *reais. Qual é o valor da taxa?*

Solução. Substituindo os valores na fórmula de juros simples (1), temos:

$$\begin{aligned} 250 = 230(1 + 5i) &\Rightarrow 1 + 5i = \frac{250}{230} = 1,0870 \\ &\Rightarrow 5i = 0,0870 \Rightarrow i = 0,0173. \end{aligned}$$

Logo,

$$i = 1,73\%.$$

□

Exemplo 3. *Se alguém aplicar* 300 *reais no regime de juros simples a uma taxa de* 5% *ao mês, quanto tempo levará para que o valor do capital dobre?*

Solução. Queremos que $VF = 600$, partindo de $VI = 300$. Substituindo tais valores na fórmula de juros simples (1), temos:

$$\begin{aligned} 600 = 300(1 + 0,05t) &\Rightarrow 2 = 1 + 0,05t \\ &\Rightarrow 0,05t = 1 \\ &\Rightarrow t = \frac{100}{5} = 20. \end{aligned}$$

Então, serão necessários pelo menos 20 meses para dobrar o capital. □

Vejamos, agora, alguns exemplos mais elaborados, os quais não são resolvidos apenas com a aplicação da fórmula para os juros simples.

Exemplo 4. *Uma empresa de cosméticos possui um capital de* R\$ 80.000,00 *para investimento. Seu dono aplica* 30% *desse dinheiro em um investimento que rende juros simples a uma taxa de* 3% *ao mês, e o faz durante dois meses; o restante ele aplica, também durante dois meses, em outro investimento que rende* 2% *ao mês. Ao fim desse período, quanto esse investidor possuirá?*

Solução. Calculando 30% de 80.000, encontramos o valor de 24.000 que após dois meses na primeira aplicação se tornará

$$24.000(1 + 0,03 \cdot 2) = 25.440.$$

Os outros $80.000 - 24.000 = 56.000$ reais do capital inicial correspondem aos 70% restantes, os quais se tornarão, após dois meses na segunda aplicação, em

$$56.000(1 + 0,02 \cdot 2) = 58.240.$$

Somando os valores encontrados, obtemos o montante final, de

$$25.440 + 58.240 = 83.680$$

reais. □

No próximo exemplo, utilizamos a convenção amplamente utilizada no sistema financeiro de que, ao nos referirmos a uma taxa linear anual i de juros, a taxa mensal correspondente é igual a $\frac{i}{12}$.

Exemplo 5. *Se uma pessoa precisar de* 200.000 *reais daqui a* 10 *meses, quanto ela deverá depositar hoje em um fundo de poupança que remunera o dinheiro inivestido à taxa linear de* 12% *ao ano?*

Solução. Sejam $M = 200.000$ reais, $n = 10$ meses e $i_a = 12\%$ a.a. os valores do enunciado.

Conforme comentamos acima, a taxa anual de 12% corresponde a uma taxa mensal

$$i_m = i_a/12 = 1\%.$$

Mas, uma vez que $M = C \cdot (1 + i_m \cdot n)$, temos

$$C = \frac{M}{1 + i_m \cdot n} \tag{2}$$

Portanto, em nosso caso,

$$C = \frac{200.000}{1 + 0,01 \cdot 10} \cong 181.818,18.$$

Então, é necessário depositar cerca de 181.818, 18 reais. □

Para o exemplo a seguir, note que um **título** é qualquer papel negociável, como por exemplo *ações*, *letras de câmbio*, *promissórias*. Um título pode ser vendido, por exemplo, por governos ou empresas a outros governos, empresas ou pessoas físicas, para obter recursos para múltiplos fins (por exemplo, realizar obras de infraestrutura, comprar máquinas, renovar estoque, abrir uma filial etc). Assim, um título pode ser visto como um contrato de empréstimo, no qual o emissor dos papéis (o lado que recebe o dinheiro) faz uma promessa de pagamento ao comprador.

O **valor nominal** de um título vem impresso no próprio título. O **valor atual** de um título é o valor que ele tem numa data anterior ao seu vencimento. Colocado a render juros a partir dessa data, por definição esse valor atingirá, no vencimento do título, um montante igual ao valor nominal.

Exemplo 6. *Um título com valor nominal de* 10.000 *reais vence em* 180 *dias. Para uma taxa de juros simples de* 31, 2% *ao ano, calcule o valor do título:*

a) Hoje.

b) Daqui a 30 *dias.*

c) Daqui a 90 *dias.*

Solução. Sejam $M = 10.000$ reais e $i_a = 31,2\%$ a.a. os valores dados no enunciado. Considere $i_m = i_a/12 = 2,6\%$ a.m. Segue de (2) que

$$C = \frac{M}{1 + i_m \cdot n} = \frac{10000}{1 + 0,026 \cdot n}.$$

Agora, temos C (capital inicial) como uma função de n (meses), e nos resta apenas ver qual n nos é pedido. Note que estamos interessados na distância absoluta entre os 6 meses (180 dias) e o dia que nos é pedido nos vários itens. De outra forma, se quisermos saber o valor do título *hoje* devemos ter $n = 6$ meses, pois de hoje até o vencimento do título ainda existem 180 dias; o mesmo raciocínio segue para os demais itens.

Assim,

a) $n = 6$ meses. Temos

$$C = \frac{10000}{1 + 0,026 \cdot 6} \cong 8650,52.$$

b) $n = \frac{180-30}{30} = 5$ meses. Logo,

$$C = \frac{10000}{1 + 0,026 \cdot 5} \cong 8849,56.$$

c) $n = \frac{180-90}{30} = 3$ meses. Então,

$$C = \frac{10000}{1 + 0,026 \cdot 3} \cong 9276,44.$$

□

Exemplo 7. *Uma pessoa precisa pagar duas dívidas, uma de* 35.000 *reais em* 3 *meses e outra de* 65.000 *reais em* 5 *meses. Para fazer o pagamento dessas dívidas, o devedor utilizará suas reservas financeiras, aplicando-as em uma poupança que rende* 66% *ao ano, no regime de juros simples. Qual deve ser o valor aplicado nesta poupança para que essa pessoa consiga pagar suas dívidas?*

Solução. A taxa anual dada, de 66%, corresponde a uma taxa mensam

$$i_m = \frac{i_a}{12} = 5,5\% \text{ a.m.}$$

Assim, uma parte das reservas da pessoa, aplicada a essa taxa mensal de juros (simples) de 5, 5%, deve gerar um montante de 35.000 reais em 3 meses, enquanto outra parte, aplicada à mesma taxa e no mesmo regime de juros, deve gerarl um montante de 65.000 em 5 meses.

Portanto, capital C imobilizado pela pessoa para saldar suas dívidas corresponde à soma dessas duas partes, calculadas com o auxílio de (2) conforme descrito acima:

$$\begin{aligned} C &= \frac{35000}{1 + 0,055 \cdot 3} + \frac{65000}{1 + 0,55 \cdot 5} \\ &\cong 30042,92 + 50980,39 \\ &= 81023,31. \end{aligned}$$

□

3 Capitalização com juros compostos

No regime de juros compostos, se i é a taxa de juros por unidade de tempo (dia, mês, ano) e n é o número de períodos no qual o capital ficou aplicado, temos a seguinte relação entre o valor final VF e o valor presente VP:

$$VF = (1 + i)^n \cdot VP. \tag{3}$$

Podemos deduzir a fórmula 3 através do seguinte raciocínio: Seja VF_1 o valor do capital após o primeiro período, VF_2 após o segundo período e assim por diante. Uma vez que o regime de juros é composto, o valor do montante após um certo período é calculado fazendo a taxa i incidir sobre o valor imediatamente anterior. Assim,

$$VF_1 = VP + i \cdot VP = (1 + i)VP$$

$$VF_2 = VF_1 + i \cdot VF_1 = (1 + i)VF_1$$

$$VF_3 = VF_2 + i \cdot VF_2 = (1 + i)VF_2$$

$$\vdots$$

$$VF_n = VF_{n-1} + i \cdot VF_{n-1} = (1 + i)VF_{n-1}$$

Multiplicando todas estas n equações, obtemos

$$VF_1 \dots VF_{n-1} \cdot VF_n = (1+i)^n VP \cdot VF_1 \dots VF_{n-1}.$$

Por fim, cancelando o produto $VF_1 ... VF_{n-1}$ em ambos os membros da igualdade acima, chegamos na equação (3).

Veja que a sequência $VF_1, ..., VF_{n-1}$ dos valores capitalizados em regime de juros compostos formam uma progressão geométrica, pois cada termo é o anterior multiplicado pela constante $(1+i)$.

Comparando-se as demonstrações das fórmulas de juros simples (1) e de juros compostos (3) notamos que, na primeira, os juros são sempre calculados sobre o valor presente VI. Por outro lado, na segunda os juros são calculados sobre o valor do capital no período anterior. Na linguagem popular, dizemos que há "juros sobre juros" quando aplicamos o regime de juros compostos. Isso faz com que o crescimento do capital seja muito mais rápido com juros compostos do que com juros simples.

Mais precisamente partindo de um capital C a uma mesma taxa i (de certa periodicidade) e calculando o montante após n períodos, obtemos a *função afim*

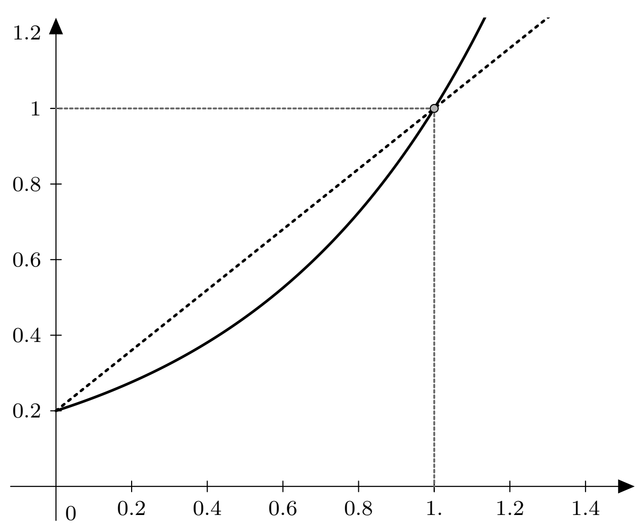
$$n \mapsto C(1+in) = C + Cin$$

no regime de juros simples e a *função exponencial*

$$n \mapsto C(1+i)^n$$

no regime de juros compostos.

Ilustrando a evolução dos montantes em ambos os regimes de juros *graficamente* colocando o número de períodos no eixo horizontal e o montante correspondente no eixo vertical, vemos que ambas as curvas partem do ponto $(0, C)$ (uma vez que C é o valor inicial, antes de que qualquer período tenha decorrido). Entretanto, no regime de juros simples a curva obtida é uma reta (pontilhada, na figura abaixo), ao passo que no regime de juros compostos é uma *exponencial* crescente (pois $1 + i > 1$ – não pontilhada, na figura abaixo).



Conforme a figura acima, após o instante inicial, as curvas se encontram após transcorrido um período, pois

$$(1+i)^1 = 1 + i \cdot 1.$$

Contudo, daí pra frente temos

$$(1+i)^n > 1 + in.$$

De fato, pode ser mostrado (com a ajuda da *fórmula do binômio de Newton*) que, para $n \geq 2$, tem-se

$$(1+i)^n \geq 1 + in + \frac{n(n-1)}{2} i^2,$$

de sorte que a diferença entre os montantes obtidos pelos dois regimes de juros cresce cada vez mais, à medida que o tempo passa.

Terminamos esta seção analisando três exemplos representativos.

Exemplo 8. *Uma aplicação especial rende* 15% *ao mês em regime de juros compostos. Certa pessoa deseja aplicar a quantia de* R\$ 620,00 *durante três meses. Calcule o montante gerado por essa aplicação.*

Solução. Utilizando a fórmula de juros compostos (3) com $VP = 620$, $i = \frac{15}{100} = 0,15$ e $n = 3$, obtemos

$$VF = (1 + 0,15)^3 \cdot 620 = (1,15)^3 \cdot 620 = 942,94.$$

□

Exemplo 9. *João tomou um empréstimo de* R\$ 900,00 *a juros compostos de* 10% *ao mês. Dois meses depois, João pagou* R\$ 600,00 *e, um mês após esse pagamento, liquidou o empréstimo. Qual foi o valor desse último pagamento?*

Solução. Veja que após o primeiro mês, a dívida será de $900 + 10\% \cdot 900 = 990$ reais; ao final do segundo mês, ela terá aumentado para $990 + 10\% \cdot 990 = 1.089$ reais. Como João pagou 600 reais neste momento, seu **saldo devedor** será de $1.089 - 600 = 489$ reais.

Agora, temos de aplicar novamente juros de 10% sobre esse valor, a fim de saber o valor devido por João ao final do terceiro mês. Assim fazendo, obtemos

$$489 + 10\% \cdot 489 = 537,90$$

reais, que foi o valor pago por João para liquidar o empréstimo. □

Nosso último exemplo ilustra o "*poder*" dos juros compostos comparando-o numericamente com o regime de juros simples.

Exemplo 10 (O "poder" dos juros compostos). *Considere dois tipos de investimentos: o primeiro paga uma taxa de juros simples de* 5% *a.m. e o segundo uma taxa de juros compostos de* 2% *a.m. Ao fazermos dois depósitos de* 1.000 *reais, um em cada tipo de investimento, quanto será o retorno de cada um após um período de dez anos?*

Solução. Veja que em dez anos existem 120 meses. Usando a fórmula de juros simples, temos:

$$VF_{120} = (1 + 120 \cdot 0,05) \cdot 1000 = 7000.$$

Usando a fórmula dos juros compostos e com o auxílio de uma calculadora (a esse respeito, veja também a próxima seção), obtemos:

$$VF_{120} = (1 + 0,02)^{120} \cdot 1000 = 10.765,16.$$

$\square$

O exemplo anterior deixa claro que, mesmo a uma taxa menor, o investimento sobre uma taxa de juros composta torna-se mais vantajoso quando temos períodos suficientemente longos de tempo.

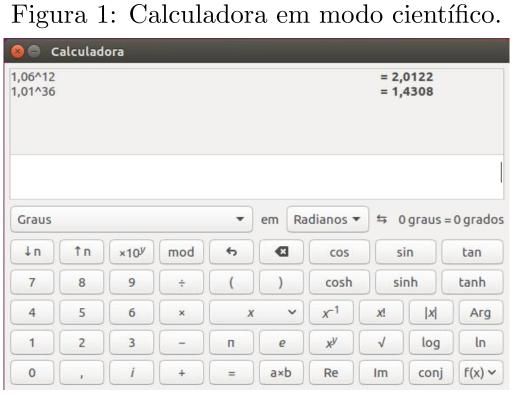
4 Usando a calculadora

Comparados aos problemas de juros simples, os exercícios de juros compostos possuem contas mais complicadas de resolver manualmente, pois envolvem operações de potenciação em vez de operações de multiplicação por constantes; isso fica claro no Exemplo 10. Quando a quantidade de períodos é pequena ($t = 2$ ou $t = 3$), as contas não se tornam demasiadamente cansativas. Porémm quando a quantidade de períodos é grande ($t = 6, 7, \ldots$), é recomendável o uso de calculadoras.

Nesta seção, primeiramente lhe ensinaremos como utilizar a calculadora do computador ou celular (ou uma calculadora científica de bolso) para efetuar operações de potenciação com valores altos no expoente.

Inicialmente, após abrir o aplicativo *calculadora* em seu computador ou celular, você deve mudá-lo do modo de *simples* para *avançado* (ou *científico*); caso esteja utilizando uma calculadora científica de bolso, esse passo será desnecessário. Após executar essa mudança, você verá uma janela semelhante à mostrada na Figura 1:

Figura 1: Calculadora em modo científico.



Observe o botão $\boxed{x^y}$, que permite o cálculo de potências. Por exemplo, se quisermos calcular o valor de $(1,06)^{12}$, digitamos:

$$\boxed{1{,}06}\ \boxed{x^y}\ \boxed{12}\ \boxed{=}$$

Para um outro exemplo, se quisermos calcular o valor de $(1,01)^{36}$, digitamos:

$$\boxed{1{,}01}\ \boxed{x^y}\ \boxed{36}\ \boxed{=}$$

Agora, consideremos mais alguns exemplos.

Exemplo 11. *Camila investiu* 10.000 *reais em um fundo de investimento ao longo de cinco anos. Ao fim desse período, percebeu que possuía* 18.500 *reais. Qual foi a taxa de rentabilidade média mensal do fundo ao longo desses anos?*

Solução. Primeiramente, veja que cinco anos correspondem a $5 \times 12 = 60$ meses. Assim, utilizando a fórmula de juros compostos, obtemos:

$$18.500 = 10.000(1 + i)^{60} \Rightarrow (1 + i)^{60} = 1,85.$$

Para calcular o valor de i, devemos elevar os dois lados da equação a $\frac{1}{60}$, assim obtendo:

$$(1 + i) = (1,85)^{1/60}.$$

Digitando

$$\boxed{1{,}85}\ \boxed{x^y}\ \boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{60}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$$

numa calculadora científica, obtemos $1,0103$ como resposta. Então,

$$1 + i = (1,85)^{1/60} = 1,0103 \Rightarrow i = 0,0103 = 1,03\%.$$

$\square$

Exemplo 12. *Joaquim tem* 1.000 *reais e deseja aplicar esse valor em um investimento que rende* 1% *ao mês. Quanto tempo ele levará para dobrar seu capital?*

Solução. Vamos aplicar os valores na fórmula de juros compostos. Sendo n o número de meses necessários para dobrar o capital investido, temos a equação

$$2000 = 1000(1,01)^n$$

ou, ainda,

$$(1,01)^n = 2.$$

Veja que temos uma equação em n. Para resolvê-la, aplicamos logaritmos a ambos os lados, de forma que:

$$\begin{aligned}(1,01)^n = 2 &\Rightarrow \log(1,01)^n = \log 2\\ &\Rightarrow n\log(1,01) = \log 2\\ &\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log(1,01)}.\end{aligned}$$

(Note que, na segunda implicação ($\Rightarrow$), utilizamos a seguinte propriedade dos logaritmos: $\log(a^b) = b\log(a)$.)

Para executar o cálculo da última expressão acima, digitamos:

$$\boxed{(}\ \boxed{\log}\ \boxed{2}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{\log}\ \boxed{1{,}01}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$$

obtendo $n = 69,66$ como resultado.

Portanto, a fim de dobrar o capital investido, serão necessários pelo menos 70 meses completos, ou quase oito anos. □

Argumentando genericamente, suponha que um capital C, investido à taxa i, gera um montante M após n períodos. Partindo de

$$M = C \cdot (1+i)^n,$$

temos

$$\begin{aligned} C \cdot (1+i)^n = M &\Rightarrow (1+i)^n = \frac{M}{C} \\ &\Rightarrow \log(1+i)^n = \log\frac{M}{C} \\ &\Rightarrow n \cdot \log(1+i) = \log\frac{M}{C} \\ &\Rightarrow n = \frac{\log\frac{M}{C}}{\log(1+i)}. \end{aligned}$$

Por fim, recordando que $\log\frac{M}{C} = \log M - \log C$, concluímos que

$$n = \frac{\log\frac{M}{C}}{\log(1+i)} = \frac{\log M - \log C}{\log(1+i)}. \tag{4}$$

Os dois exemplos a seguir utilizam a fórmula acima.

Exemplo 13. *Uma aplicação de* 22.000 *reais, efetuada em certa data à taxa composta de juros de* $2,4\%$ *ao mês, produziu um montante de* $26.596,40$ *reais. Qual foi o prazo da operação?*

Solução. Uma vez que $C = 22.000$, $M = 26.596,40$ e $i = 2,4\% = 0,024$, segue da segunda igualdade em (4) que

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log 26.596,50 - \log 22.000}{\log(1+0,024)} \\ &= \frac{4,4248 - 4,3424}{0,0103} \\ &= \frac{0,0824}{0,0103} = 8 \text{ meses.} \end{aligned}$$

□

Exemplo 14. *Qual o tempo mínimo para que um capital que cresce à taxa de* $2,2\%$ *ao mês duplique?*

Solução. Note que o montante M esperado pelo exercício é o dobro do capital inicial C, isto é, $M = 2C$. Como $i = 0,022$, a primeira igualdade em (4) fornece

$$n = \frac{\log\frac{2C}{C}}{\log(1+0,022)} = \frac{\log 2}{\log 1,022} \cong 31,85.$$

Portanto, são necessários pelo menos 32 meses para que o capital dobre. □

É instrutivo comparar o exemplo anterior com o Exemplo para perceber como uma taxa de juros maior fez diminuir, em mais da metade, o tempo necessário para o capital investido dobrar.

Para nosso último exemplo, resolvamos a igualdade $M = C(1+i)^n$ para i:

$$\begin{aligned} C \cdot (1+i)^n = M &\Rightarrow (1+i)^n = \frac{M}{C} \\ &\Rightarrow 1 + i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} \\ &\Rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Exemplo 15. *Para uma mercadoria que vale* 900 *reais, uma loja oferece desconto de* 12% *se o pagamento for feito a vista. Se o pagamento for feito em até noventa dias, a loja diz não cobrar juros, mas não oferece desconto. Calcule o custo efetivo mensal, isto é, os juros embutidos na compra a prazo.*

Solução. Na situação descrita, a loja age como se o preço não fosse 900 reais, e sim

$$(100\% - 12\%) \cdot 900 = 88\% \cdot 900 = 792$$

reais.

Ao aceitar receber o pagamento em até 90 dias, a loja embute juros compostos a uma taxa mensal i, que faz com que a capitalização dos 792 reais em juros compostos, por três meses, gere 900 reais ao final. Então, a última igualdade em (5) fornece

$$i = \sqrt[3]{\frac{900}{792}} - 1 = \sqrt[3]{1,136} - 1 \cong 1,043 - 1 = 0,043.$$

Portanto, a taxa de juros efetiva da compra com pagamento em 90 dias é de aproximadamente $4,3\%$. □

Sugestões ao Professor

Separe dois encontros de 100 minutos cada para abordar os assuntos deste material. No primeiro encontro, ensine os conceitos básicos sobre juros simples e resolva os exemplos aqui reunidos. Também, deixe claro que os juros simples não são usados em aplicações reais; trata-se de um passo didático para que os estudantes possam compreender melhor os juros compostos.

No segundo encontro, introduza o conceito de juros compostos e resolva os exemplos. Aproveite o momento para mostrar a diferença entre as duas formas de capitalização. No final da aula, solicite aos alunos que comentem sobre situações reais nas quais eles se depararam com uma aplicação dos assuntos abordados nesta aula. Se possível, elabore mais exercícios, os quais simulem as situações apresentadas pelos alunos.