

Material Teórico - Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Resolução de Exercícios: Expressões Numéricas

Oitavo Ano

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto



Exemplo 1. Simplificando a expressão numérica

$$2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4$$

obtemos

$$\begin{aligned} 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4 &= 4 \cdot 2^6 - (2^2)^4 \\ &= 2^2 \cdot 2^6 - 2^{2 \cdot 4} = 2^8 - 2^8 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Sabendo que $\sqrt[5]{x^3} = 2015^2$, $\sqrt[4]{y^9} = 2015^3$ e $\sqrt[3]{z^7} = 2015^4$, escreva o número $(x \cdot y \cdot z)^{21}$ como uma potência de base 2015 e expoente inteiro.

Solução. Veja que

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{x^3} = 2015^2 &\implies x^{\frac{3}{5}} = 2015^2 \implies \left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = (2015^2)^{\frac{5}{3}} \\ &\implies x = 2015^{\frac{10}{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{y^9} = 2015^3 &\implies y^{\frac{9}{4}} = 2015^3 \implies \left(y^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{4}{9}} = (2015^3)^{\frac{4}{9}} \\ &\implies y = 2015^{\frac{12}{9}} = 2015^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z^7} = 2015^4 &\implies z^{\frac{7}{3}} = 2015^4 \implies \left(z^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{7}} = (2015^4)^{\frac{3}{7}} \\ &\implies z = 2015^{\frac{12}{7}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (x \cdot y \cdot z)^{21} &= \left(2015^{\frac{10}{3}} \cdot 2015^{\frac{4}{3}} \cdot 2015^{\frac{12}{7}}\right)^{21} \\ &= \left(2015^{\frac{10}{3}}\right)^{21} \cdot \left(2015^{\frac{4}{3}}\right)^{21} \cdot \left(2015^{\frac{12}{7}}\right)^{21} \\ &= 2015^{70} \cdot 2015^{28} \cdot 2015^{36} = 2015^{134}. \end{aligned}$$

Exemplo 3. Se $\frac{p}{q}$ é a fração irredutível equivalente a $\frac{6,888\dots}{2,444\dots}$, calcule o valor de $p + q$.

Solução. Fazendo $a = 6,888\dots$ e $b = 2,444\dots$, temos

$$\begin{array}{r} 10a = 68,888\dots \\ -a = -6,888\dots \\ \hline \Rightarrow 9a = 62 \\ \Rightarrow a = \frac{62}{9} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r} 10b = 24,444\dots \\ -b = -2,444\dots \\ \hline \Rightarrow 9b = 22 \\ \Rightarrow b = \frac{22}{9}. \end{array}$$

Daí, segue que

$$\frac{6,888\dots}{2,444\dots} = \frac{\frac{62}{9}}{\frac{22}{9}} = \frac{62}{22} \cdot \frac{9}{9} = \frac{62}{22} = \frac{31}{11}.$$

Portanto, $p = 31$ e $q = 11$ e, assim, $p + q = 42$. \square

Exemplo 4. Simplifique a expressão

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Solução. Inicialmente, observe que, para números reais a e b , temos

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b) \\ &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Agora, utilizando duas vezes a igualdade

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

juntamente com as propriedades de radiciação, obtemos:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2^2 - (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

\square

Exemplo 5. Simplifique a expressão

$$\frac{2^{2003} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}}$$

Solução. Utilizando várias vezes as propriedades de potenciação estudadas, obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{2^{2003} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} = \\ &= \frac{2^{2003} \cdot 9^{1001} + 2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} \\ &= \frac{(2^{2003} + 2^{2002}) \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} \\ &= \frac{(2 + 1) \cdot 2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{2002} \cdot (3^2)^{1001}}{(2^2)^{1001} \cdot 3^{2003}} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{2002} \cdot 3^{2002}}{2^{2002} \cdot 3^{2003}} \\ &= \frac{2^{2002} \cdot 3^{2003}}{2^{2002} \cdot 3^{2003}} = 1. \end{aligned}$$

Exemplo 6. Resolva a expressão numérica

$$\left(\frac{3^{11} + 3^9}{10}\right)^{0,333\dots}$$

Solução. Fazendo $a = 0,333\dots$, obtemos

$$\begin{aligned} 10a &= 3,333\dots \\ -a &= -0,333\dots \\ \hline \Rightarrow 9a &= 3 \\ \Rightarrow a &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left(\frac{3^{11} + 3^9}{10}\right)^{0,333\dots} &= \left(\frac{3^9 \cdot (3^2 + 1)}{10}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{3^9 \cdot 10}{10}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{9 \cdot \frac{1}{3}} = 3^3 = 27. \end{aligned}$$

Exemplo 7. Calcule o valor da expressão

$$\sqrt{\frac{0,666\dots^{0,666\dots}}{0,333\dots^{1,333\dots}}}$$

Solução. Fazendo $a = 0,333\dots$, $b = 0,666\dots$ e $c = 1,333\dots$, temos $a = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} 10b &= 6,666\dots \\ -b &= -0,666\dots \\ \hline \Rightarrow 9b &= 6 \\ \Rightarrow b &= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 10c &= 13,333\dots \\ -c &= -1,333\dots \\ \hline \Rightarrow 9c &= 12 \\ \Rightarrow c &= \frac{12}{9} = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{0,666\dots^{0,666\dots}}{0,333\dots^{1,333\dots}}} &= \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}}}{\sqrt[3]{\frac{1^4}{3^4}}}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2} \cdot 3^4} \\ &= \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^2} = ((2 \cdot 3)^2)^{\frac{1}{6}} \\ &= 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8. Calcule o valor da expressão

$$\sqrt[3]{29 - \sqrt[6]{2^5 + \frac{5,333\dots}{1,333\dots}} + 3^3 + 2015^0}$$

Solução. Observando as soluções dos exemplos 6 e 7, obtemos, de maneira análoga, que $5,333\dots = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$ e $1,333\dots = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{29 - \sqrt[6]{2^5 + \frac{5,333\dots}{1,333\dots}} + 3^3 + 2015^0} = \\ &= \sqrt[3]{29 - \sqrt[6]{32 + \frac{\frac{16}{3}}{\frac{4}{3}} + 27 + 1}} \\ &= \sqrt[3]{29 - \sqrt[6]{32 + \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{4} + 27 + 1}} \\ &= \sqrt[3]{29 - \sqrt[6]{32 + 4 + 27 + 1}} \\ &= \sqrt[3]{29 - \sqrt[6]{64}} \\ &= \sqrt[3]{29 - 2} = \sqrt[3]{27} = 3. \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Dois sessões de 50min são suficientes para resolver, com todos os detalhes, os oito exemplos que compõem este material. Mais uma vez, chame a atenção para as propriedades que são utilizadas em cada caso.

□