

Material teórico – Óptica Geométrica IV

Estudo analítico das lentes

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Thales Azevedo

Revisor: Luna Lima



**Portal
da Física
OBMEP**

1. Equação de Gauss e estudo analítico de lentes esféricas

Vimos anteriormente que as características da imagem formada por uma lente esférica dependem, em geral, da posição do objeto em relação ao centro óptico da lente, de maneira totalmente análoga ao que acontece com as imagens formadas por espelhos esféricos. Por exemplo, se um objeto for posto suficientemente próximo de uma lente convergente (ou seja, entre o centro óptico e o foco), deduzimos que a imagem formada será virtual, direita e maior que o objeto em questão. Mas qual será exatamente o **tamanho da imagem**? A que **distância da lente** ela se formará? E será que poderíamos deduzir que a imagem é virtual e direita sem ter que recorrer a uma figura?

Essas mesmas perguntas foram feitas quando estudamos os espelhos esféricos. De fato, neste texto vamos fazer um **estudo analítico** das lentes esféricas que é bastante semelhante àquele feito no contexto dos espelhos esféricos. Isto significa que iremos relacionar as propriedades da imagem formada por uma dada lente esférica com aquelas do objeto e da própria lente através de expressões algébricas. Interessantemente, a analogia entre lentes e espelhos esféricos faz-se presente mais uma vez, e a mesma **equação de Gauss** deduzida no contexto dos espelhos esféricos continua válida para as lentes esféricas. Também tem a mesma forma a chamada **equação do aumento linear transversal**, que relaciona os tamanhos da imagem e do objeto com suas distâncias ao centro óptico da lente. No entanto, para obtermos esses resultados, será preciso adotar convenções de sinal adequadas, definidas pelo chamado **referencial de Gauss**, que no caso das lentes esféricas possui uma definição ligeiramente diferente daquela introduzida no contexto dos espelhos esféricos, como veremos adiante.

1.1. O referencial de Gauss para lentes esféricas

Antes de deduzirmos as expressões algébricas que nos permitirão fazer o estudo analítico das lentes esféricas, precisamos introduzir um sistema de eixos coordenados em relação ao qual definiremos as posições dos pontos de interesse. Uma escolha bastante conveniente é o chamado referencial de Gauss, que adotaremos neste texto.

No referencial de Gauss, o eixo das abscissas (“eixo X ”) coincide com o eixo focal da lente, enquanto a origem coincide com o centro óptico. Por convenção, pontos atrás da lente (ou seja, pontos do lado oposto ao do objeto luminoso em questão) possuem coordenadas x positivas (lado “real”), enquanto pontos na frente da lente (ou seja, pontos do mesmo lado que o objeto luminoso) possuem coordenadas x negativas (lado “virtual”).

Observação importante: o objeto luminoso, suposto real, sempre terá coordenadas positivas, por definição. É o custo que pagamos para que as equações que regem o estudo analítico das lentes esféricas sejam idênticas àquelas que encontramos no estudo dos espelhos esféricos, como veremos na próxima seção.

Naturalmente, o eixo das ordenadas (“eixo Y ”) intercepta o eixo X no centro óptico, e pontos acima ou abaixo do eixo principal possuem coordenadas y positivas ou negativas, respectivamente. Tais convenções estão resumidas na figura 1, a seguir. Note

que essas convenções não fazem distinção entre lentes convergentes e divergentes, de modo que não é necessário especificar o tipo de lente na figura. No entanto, é preciso especificar de que lado se encontra o objeto luminoso cuja imagem desejamos analisar.

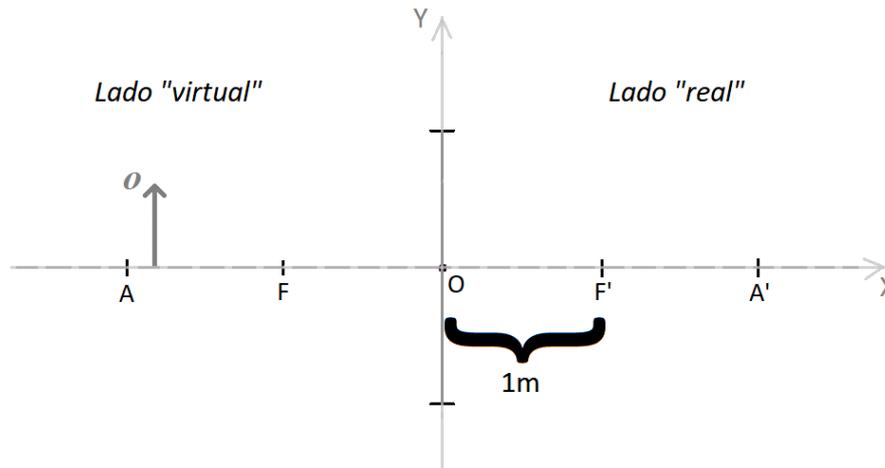


Figura 1: Referencial de Gauss em uma lente esférica de distância focal igual a 1 m. Note que as coordenadas do centro óptico, dos focos e dos pontos antiprincipais são dadas, respectivamente, por $\mathbf{O}=(0, 0)$, $\mathbf{F}=(-1\text{m}, 0)$, $\mathbf{F}'=(1\text{m},0)$, $\mathbf{A}=(-2\text{m},0)$ e $\mathbf{A}'=(2\text{m}, 0)$.

1.2. Dedução da equação de Gauss

Uma vez estabelecidas as nossas convenções, podemos partir para a dedução da equação de Gauss no contexto das lentes esféricas. Para tanto, considere um objeto extenso posicionado de maneira perpendicular ao eixo focal de uma lente convergente, a uma distância p do centro óptico, como mostra a figura 2. Na figura, estão representados também dois raios particulares emitidos pelo objeto (um que incide na lente paralelamente ao eixo focal e, portanto, é refratado na direção do foco imagem; e outro que, ao contrário, incide passando pelo foco objeto e, portanto, é refletido paralelamente ao eixo focal) e a imagem formada, a uma distância p' do vértice.

Assim, usando as letras o e i para denotar as coordenadas y das extremidades do objeto e da imagem, respectivamente, temos que a extremidade do objeto pode ser representada pelo ponto O' (a linha tem por objetivo evitar confusão com o centro óptico O) de coordenadas (p, o) , enquanto a extremidade da imagem pode ser representada pelo ponto I de coordenadas (p', i) . Em particular, note que, no caso ilustrado na figura, $i < 0$, uma vez que se trata de uma imagem invertida.

Embora o objeto esteja, por definição, no lado “virtual” da lente, tomaremos sempre $p > 0$ para um objeto real, como mencionado anteriormente.

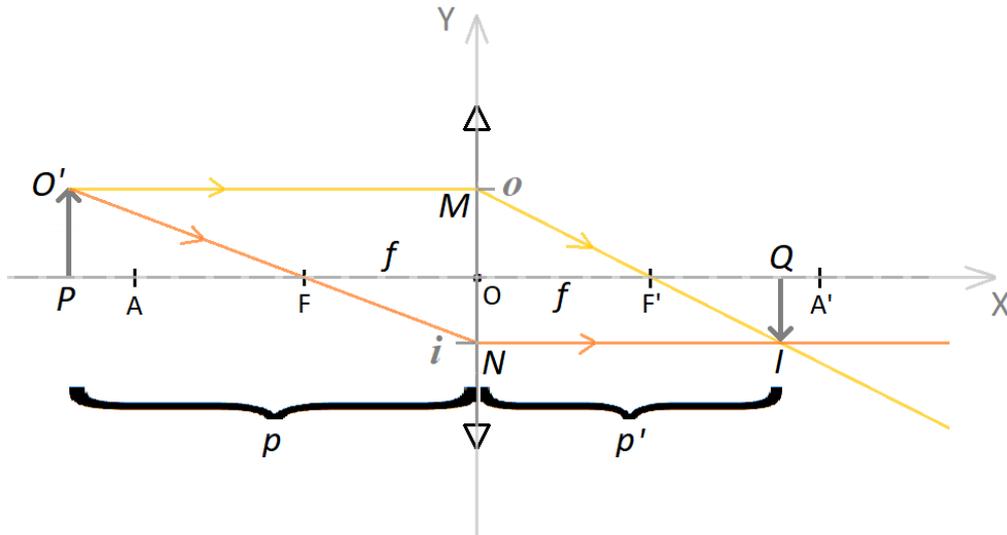


Figura 2: Formação da imagem em uma lente convergente quando o objeto é colocado a uma distância p da lente.

Como um passo intermediário para deduzir a equação de Gauss, podemos introduzir o conceito de *ampliação linear*, denotado pela letra A , e definido pela seguinte razão entre coordenadas:

$$A = \frac{i}{o},$$

da mesma forma que fizemos no texto sobre o estudo analítico dos espelhos esféricos. Lembre que a ampliação linear permite-nos quantificar a diferença de tamanho entre o objeto e a imagem, além de determinar se esta é invertida ou não em relação àquele. Por exemplo, um $A = -2$ significa que a imagem tem o dobro do tamanho do objeto e é invertida em relação a ele. Já um $A = 0,5$ implica uma imagem direita cujo tamanho é metade daquele do objeto.

Também podemos relacionar a ampliação linear com as coordenadas p e p' . De fato, a partir da figura 2, podemos ver que os triângulos NOF e NMO' são semelhantes. Sendo assim, a razão entre as suas alturas tem que ser igual à razão entre as suas bases. Note que a altura do triângulo NOF é dada por $-i$, pois i é um número negativo! Logo, a semelhança de triângulos implica

$$\frac{-i}{f} = \frac{MN}{p},$$

onde usamos que $OF = f$. Além disso, a figura 2 também nos permite ver que os triângulos MOF' e MNI são semelhantes; portanto,

$$\frac{o}{f} = \frac{MN}{p'},$$

onde usamos que $OF' = f$. Dividindo as duas últimas equações uma pela outra, obtemos

$$A = \frac{i}{o} = \frac{-p'}{p},$$

Que é a chamada *equação do aumento linear transversal* (a mesma que obtivemos no estudo analítico dos espelhos esféricos).

Vejam, agora, os triângulos FPO' e FON. Como esses triângulos também são semelhantes, vale a mesma relação entre bases e alturas que acabamos de usar. Nesse caso, temos

$$\frac{OF}{PF} = \frac{ON}{PO'}$$
$$\frac{f}{p-f} = \frac{-i}{o'}$$

Mas, pela equação do aumento linear transversal, sabemos que $\frac{-i}{o'} = \frac{p'}{p}$. Portanto,

$$\frac{f}{p-f} = \frac{p'}{p}$$
$$pf = p'(p - f)$$
$$pf = p'p - p'f$$
$$pf + p'f = p'p$$
$$f = \frac{p'p}{p+p'}$$

Chegamos, assim, à equação de Gauss, mais comumente apresentada na seguinte forma equivalente (obtida tomando o inverso de ambos os lados na última equação acima):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Apesar de termos obtido tal equação a partir de um caso particular, ela de fato permanece válida em todos os casos possíveis e para ambos os tipos de lentes delgadas esféricas, desde que adotemos as convenções de sinais consistentes com o referencial de Gauss. É interessante notar que a analogia entre lentes e espelhos esféricos fez-se presente de novo, uma vez que encontramos exatamente as mesmas equações nos dois casos.

De fato, cabe um último comentário sobre a convenção de sinais para f na expressão acima. Nós vimos que, para espelhos côncavos, tínhamos $f > 0$, enquanto para espelhos convexos a convenção era $f < 0$. Dadas as várias analogias que encontramos entre lentes convergentes e espelhos côncavos, e entre lentes divergentes e espelhos convexos, não deve ser surpreendente que, para que a equação de Gauss produza resultados consistentes, devemos adotar as seguintes convenções:

- Lente convergente: $f > 0$;
- Lente divergente: $f < 0$.

Uma outra maneira de ver que essas convenções fazem sentido é olhar para a figura 1 e perceber que, se a lente for convergente, raios que incidem paralelamente ao eixo focal convergem para o foco F', que possui coordenada positiva; ao passo que, se a lente for divergente, então tais raios divergem a partir do foco F, que possui coordenada negativa.

2. Dioptro esférico e Equação de Halley

Continuando nossos estudos sobre as lentes esféricas, faremos nesta seção uma breve discussão sobre **dioptros esféricos**, que estão diretamente ligados àquelas lentes. De fato, a análise da formação de imagens em um dioptro esférico levar-nos-á a uma equação que servirá de base para a demonstração da chamada **equação de Halley**, também conhecida como **equação dos fabricantes de lentes**. Essa equação permite calcular a distância focal de uma dada lente a partir do índice de refração do material de que ela é feita, do índice de refração do meio no qual será inserida e dos raios de suas superfícies esféricas, como veremos a seguir.

2.1. Formação de imagens no dioptro esférico

Como vimos no texto sobre o dioptro plano, um dioptro é qualquer sistema formado por dois meios transparentes à luz que mantêm contato entre si. No caso particular em que a superfície que separa os dois meios é esférica, dizemos se tratar de um dioptro esférico. De fato, as lentes esféricas que temos estudado (côncavo-convexa, bicôncava etc) constituem uma associação de dois dioptros esféricos.

Nesta seção, nosso objetivo é obter uma equação que relaciona a distância de um objeto luminoso à superfície que separa os meios que compõem o dioptro esférico com a distância dessa superfície à imagem formada. Para tanto, contaremos com o auxílio do esquema apresentado na figura 3, abaixo.

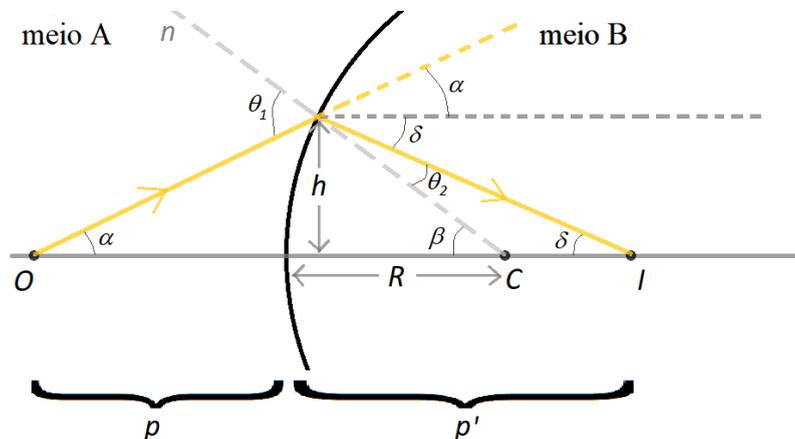


Figura 3: Esquema da formação da imagem I do objeto O em um dioptro esférico formado por meios de índice de refração n_A e n_B separados por uma superfície de raio R e centro em C .

Para obter a relação entre as coordenadas p e p' na figura acima (ambas positivas, de acordo com o referencial de Gauss), vamos supor que o índice de refração do meio A, no qual o objeto luminoso está imerso, é menor que o índice de refração do

meio B, no qual a imagem se forma. Ou seja, suporemos $n_A < n_B$. Além disso, estudaremos apenas raios luminosos emitidos numa direção próxima do eixo óptico do sistema, o que implica que podemos considerar os ângulos α , β e δ como sendo muito pequenos (esta é a chamada *aproximação paraxial*, que também usamos ao estudar o dioptra plano). Note que, na figura 3, os ângulos tiveram seus tamanhos exagerados para facilitar a visualização.

Ao encontrar a superfície que separa os meios A e B, o raio luminoso representado na figura 3 sofre refração, de modo que podemos relacionar os ângulos θ_1 e θ_2 da maneira usual, através da lei de Snell–Descartes:

$$n_A \text{sen}\theta_1 = n_B \text{sen}\theta_2.$$

Como, neste caso, os ângulos envolvidos são muito pequenos, podemos recorrer àquela aproximação que já empregamos algumas vezes ao longo de nossos estudos:

$$\cos\theta \approx 1, \text{ para } \theta \text{ muito pequeno.}$$

Dada essa aproximação, podemos substituir a função seno pela função tangente, da mesma forma que fizemos no texto sobre dioptras planos, uma vez que

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \approx \text{sen}\theta.$$

Sendo assim, a lei de Snell–Descartes, *neste caso específico*, fica

$$n_A \tan\theta_1 = n_B \tan\theta_2.$$

Agora, a partir da figura 3, vemos que $\theta_1 = \alpha + (\theta_2 + \delta) = \alpha + \beta$ e $\theta_2 = \beta - \delta$. Assim, substituindo essas relações na equação acima, ficamos com

$$n_A \tan(\alpha + \beta) = n_B \tan(\beta - \delta).$$

O fato de que α , β e δ são ângulos muito pequenos permite-nos simplificar a equação acima. Isso porque a tangente de um ângulo pequeno é um número pequeno e, portanto, o produto das tangentes de ângulos pequenos é um número menor ainda, muito menor do que 1, por exemplo. Desse modo, podemos usar a seguinte aproximação:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} \approx \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1} = \tan\alpha + \tan\beta.$$

Analogamente, $\tan(\beta - \delta) \approx \tan\beta - \tan\delta$. Voltando à equação oriunda da lei de Snell–Descartes, temos, então,

$$n_A (\tan\alpha + \tan\beta) = n_B (\tan\beta - \tan\delta).$$

Finalmente, lembrando que em um triângulo retângulo a tangente é definida como a razão entre o cateto oposto pelo cateto adjacente, obtemos a partir da figura 1 que

$$\tan\alpha = \frac{h}{p}, \quad \tan\beta = \frac{h}{R} \quad \text{e} \quad \tan\delta = \frac{h}{p'}.$$

Portanto, substituindo esses resultados na equação anterior, ficamos com

$$n_A \left(\frac{h}{p} + \frac{h}{R} \right) = n_B \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{p'} \right).$$

Rearranjando os termos e dividindo a equação por h , chegamos finalmente à equação desejada:

$$\frac{n_A}{p} + \frac{n_B}{p'} = \frac{n_B - n_A}{R}.$$

Repare que, no limite em que o raio da superfície tende ao infinito (na prática, quando R é muito maior que p , por exemplo), a superfície esférica torna-se plana, de modo que reobtemos um dioptro plano. De fato, nesse limite, podemos desprezar o termo do lado direito da equação acima, recuperando assim o resultado obtido no texto sobre dioptro plano (lembre-se de que, naquele caso, a imagem forma-se no mesmo meio em que o objeto está inserido e, portanto, no referencial de Gauss, $p' < 0$).

2.2. Equação de Halley

Uma vez obtida a equação que relaciona p com p' em um dioptro esférico, temos todos os elementos necessários para deduzir a *equação de Halley*, também conhecida como *equação dos fabricantes de lentes*, que fornece a distância focal de uma dada lente a partir do índice de refração do material de que ela é feita, do índice de refração do meio no qual será inserida e dos raios de suas superfícies esféricas, como veremos a seguir.

Como mencionado na subseção anterior, lentes esféricas constituem uma associação de dois dioptros esféricos. Veja, por exemplo, a figura 4, abaixo, em que está esquematizada a formação da imagem de um objeto luminoso por uma lente côncavo-convexa de raios de curvatura r_1 e r_2 . Cada superfície da lente, junto com os meios no seu entorno, pode ser vista como um dioptro esférico. Sendo assim, a última equação obtida na seção anterior pode ser aplicada duas vezes neste caso.

Para a imagem I_1 formada pelo primeiro dioptro, associado à superfície convexa da lente, de raio de curvatura $r_1 < r_2$, vale a relação

$$\frac{n_A}{p} + \frac{n_B}{p_1'} = \frac{n_B - n_A}{r_1},$$

onde n_B é o índice de refração do material de que é feita a lente e n_A é o índice de refração do meio no qual ela está inserida. Dessa relação, concluímos que a imagem I_1 forma-se a uma distância p_1' da superfície convexa.

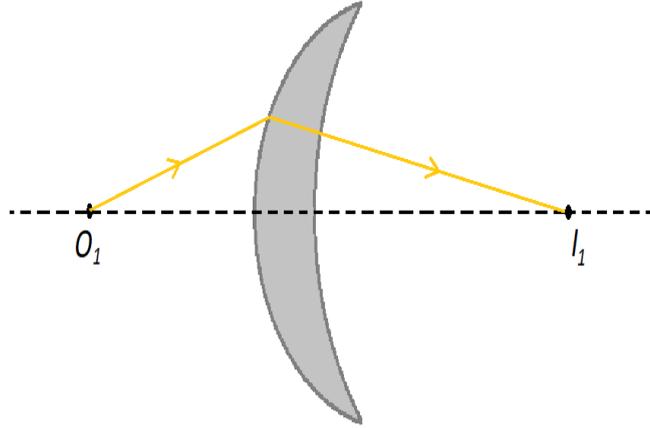


Figura 4: Formação da imagem de um objeto luminoso por uma lente côncavo-convexa de raios de curvatura r_1 e r_2 . Cada superfície da lente, junto com os meios no seu entorno, pode ser vista como um dioptra esférico.

Agora, a imagem I_1 faz o papel de objeto para o segundo dioptra esférico, associado à superfície côncava da lente, de raio de curvatura r_2 . Como tal objeto está do lado oposto ao objeto original O_1 , trata-se de um objeto virtual. Por esse motivo, na equação associada ao segundo dioptra esférico, a posição do objeto entra com uma coordenada negativa. Mais precisamente, desprezando a espessura da lente (afinal, tratamos sempre de lentes delgadas), temos que essa coordenada é dada por $-p_1'$.

Além disso, como no segundo dioptra esférico os raios luminosos passam do meio B para o meio A, devemos trocar n_A por n_B (e vice-versa) na equação do dioptra esférico. Reunindo todas essas informações, concluímos que, para a imagem formada no segundo dioptra esférico (e, portanto, para a imagem formada pela lente), vale a relação

$$\frac{n_B}{-p_1'} + \frac{n_A}{p'} = \frac{n_A - n_B}{r_2}.$$

Somando esta equação com aquela válida para o primeiro dioptra, os termos com p_1' cancelam-se e ficamos com

$$n_A \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right) = (n_B - n_A) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Finalmente, usando a equação de Gauss $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ e dividindo a equação acima por n_A , obtemos

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_B}{n_A} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

que é a chamada equação de Halley ou equação dos fabricantes de lentes. A grandeza definida como o inverso da distância focal recebe o nome de *vergência*. Sua unidade no Sistema Internacional é o inverso do metro (m^{-1}), também chamada de dioptria (di), mas coloquialmente usa-se muito o termo “grau”, que tem o mesmo significado.