Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Teorema de Tales - Parte I

Nono Ano do Ensino Fundamental

Prof. Marcelo Mendes
Prof. Antonio Caminha

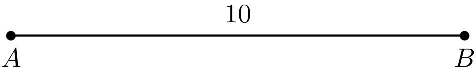
05 de Fevereiro de 2026

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

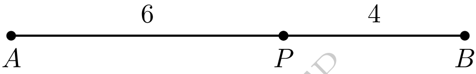
1 Razão de segmentos

Para organizar as ideias, iniciemos com o seguinte

Exemplo 1. *Considere um segmento AB de comprimento 10.*



A fim de encontrar um ponto P, interno ao segmento AB e que o divida na razão $3:2$ a partir de A, dividimos AB em $3+2=5$ partes e marcamos P deixando 3 partes à sua esquerda (entre A e P) e 2 à sua direita (entre P e B).



Assim, o comprimento de cada parte deve valer $\frac{10}{5}=2$, de modo que $\overline{AP}=3\cdot 2=6$, $\overline{BP}=2\cdot 2=4$ e a razão $3:2$ aparece em

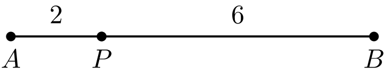
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{6}{4}.$$

Deixando de lado os valores específicos do exemplo anterior (os quais serviram apenas para simplificar a ideia que queremos desenvolver), vemos que a fração $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ denota a razão em que P divide o segmento AB. Observe que o ponto P aparece tanto no numerador quanto no denominador; além disso, os extremos do segmento (no caso, os pontos A e B) aparecem um no numerador e o outro no denominador.

Vejamos mais alguns exemplos, a fim de fixar as ideias.

Exemplo 2. *Divida um segmento AB, que mede 8cm, na razão $1:3$ a partir de A.*

Solução. Como queremos dividir AB na razão $1:3$, vamos dividi-lo em quatro partes de tamanho $\frac{8}{4}=2$ centímetros cada, fazendo uma dessas partes corresponder ao segmento AP. Assim, P está a 2cm de A e 6cm de B.



□

Exemplo 3. *Divida um segmento AB, que mede $8cm$, na razão $1 : \sqrt{2}$ a partir de A.*

Solução. Queremos dividir AB na razão $1 : \sqrt{2}$, mas, para tanto, não podemos dividi-lo em $1 + \sqrt{2}$ partes, pois essa quantidade não é um número inteiro. Entretanto, isso não é problema; basta observarmos que queremos um ponto P no interior de AB tal que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como

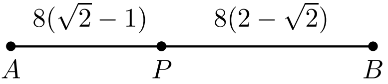
$$\begin{aligned}\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \overline{AP}\sqrt{2} = \overline{PB}\\ &\Leftrightarrow \overline{AP}(\sqrt{2}+1) = \overline{AP} + \overline{PB}\\ &\Leftrightarrow \overline{AP}(\sqrt{2}+1) = \overline{AB} = 8,\end{aligned}$$

devemos ter

$$\overline{AP} = \frac{8}{\sqrt{2}+1} = \frac{8}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 8(\sqrt{2}-1);$$

daí,

$$\overline{BP} = 8 - \overline{AP} = 8 - 8(\sqrt{2}-1) = 8(2-\sqrt{2}).$$



□

Exemplo 4. *Dado um segmento AB, o **segmento áureo de AB a partir de A** é o segmento AP, com P em AB, tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$. Se $\overline{AB} = 10$, calcule o comprimento de AP.*

Solução. Faça $\overline{AP} = x$. Pelas condições do enunciado, temos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} &\Leftrightarrow \frac{10}{x} = \frac{x}{10-x}\\ &\Leftrightarrow x^2 = 100 - 10x\\ &\Leftrightarrow x^2 + 10x - 100 = 0.\end{aligned}$$

Como o discriminante dessa equação de segundo grau vale $10^2 - 4(-100) = 500$ e x é positivo (pois é o comprimento de um segmento), temos

$$x = \frac{-10 + \sqrt{500}}{2} = \frac{-10 + 10\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5} - 5.$$

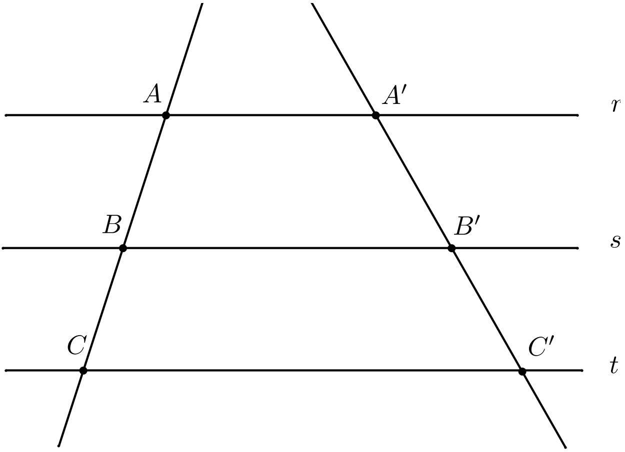
□

2 O teorema de Tales

O teorema de Tales é um resultado fundamental em Geometria Euclidiana plana, e pode ser enunciado da seguinte forma.

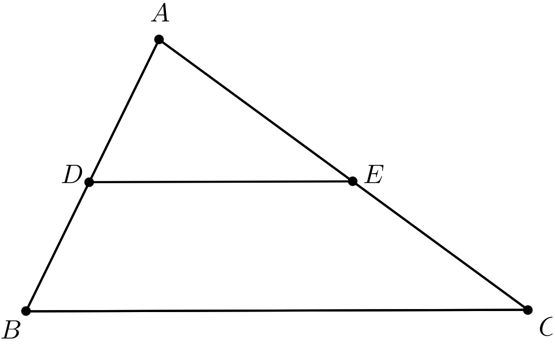
Teorema 5 (Tales). *Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhidos (acompanhe na figura a seguir) pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$ de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares, tem-se sempre*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$



A demonstração deste teorema requer elaborações que estão além dos propósitos destas notas; nesse sentido, sugerimos consultar a referência [1]. Contudo, na próxima seção discutiremos a demonstração de um caso particular relevante. Aqui, vamos nos concentrar em utilizá-lo.

Exemplo 6. *Na figura abaixo, os segmentos BC e DE são paralelos, $\overline{AB} = 15cm$, $\overline{AD} = 5cm$ e $\overline{AE} = 6cm$. Calcule a medida em centímetros do segmento CE.*

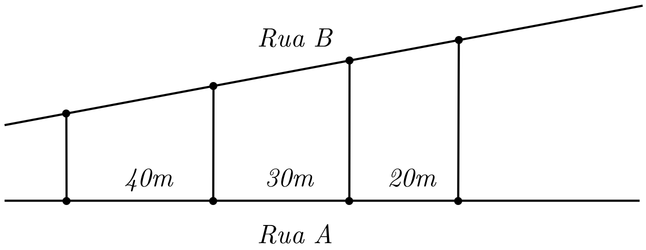


Solução. Pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{5}{15} = \frac{6}{AC} \Leftrightarrow \overline{AC} = 18 \Leftrightarrow \overline{CE} = 12.$$

$\square$

Exemplo 7. *Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura abaixo. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente de cada lote para a rua B, sabendo que a frente total para essa rua tem* $180m$*?*



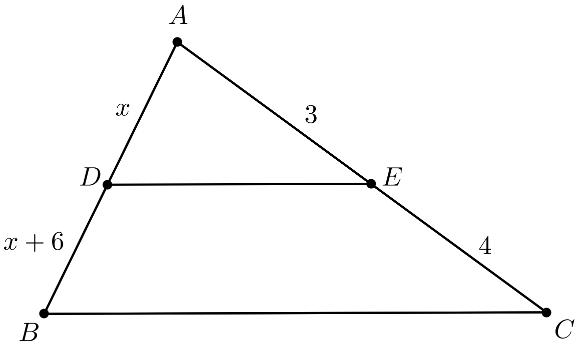
Solução. Como o teorema de Tales garante a proporcionalidade entre as medidas dos segmentos determinados em retas transversais por retas paralelas, podemos representar as medidas das frentes para a rua B por $4k$, $3k$ e $2k$ (de forma a garantir que $\frac{40}{4k} = \frac{30}{3k} = \frac{20}{2k}$). Assim,

$$4k + 3k + 2k = 180 \Leftrightarrow 9k = 180 \Leftrightarrow k = 20.$$

Portanto, as medidas das frentes do lotes para a rua B são $4k = 80m$, $3k = 60m$ e $2k = 40m$. $\square$

Exemplo 8. *Uma reta paralela ao lado* BC *de um triângulo* ABC *determina os pontos* D *em* AB *e* E *em* AC*. Sabendo-se que* $\overline{AD} = x$, $\overline{BD} = x + 6$, $\overline{AE} = 3$ *e* $\overline{EC} = 4$*, calcule o comprimento do lado* AB *do triângulo* ABC*.*

Solução. A figura a seguir ilustra a situação descrita no enunciado. Como $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, o teorema de Tales nos dá a



igualdade

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

Agora, pelos dados do enunciado, temos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x = 3x + 18 \Leftrightarrow x = 18.$$

Dessa forma,

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 2x + 6 = 40.$$

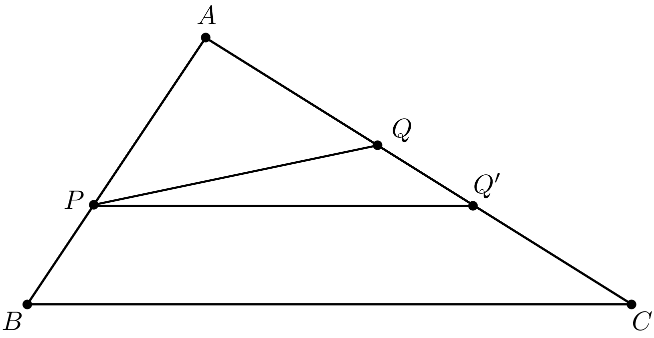
□

Exemplo 9. *Em um triângulo ABC, marcamos pontos P e Q sobre os lados AB e AC, respectivamente, de modo que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$. Mostre que $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.*

Solução. Suponha que PQ não seja paralelo a BC (acompanhe o raciocínio na figura a seguir, a qual ilustra a situação descrita).

Trace, então, a reta paralela ao lado BC passando por P, e marque seu ponto Q' de interseção com BC. Pelo teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'C}}.$$



Como a igualdade $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$ é satisfeita por hipótese, devemos ter

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'C}}.$$

Portanto, os pontos Q e Q' são distintos e dividem o lado AC na mesma razão, o que é absurdo. Logo, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. $\square$

3 Provando um caso particular

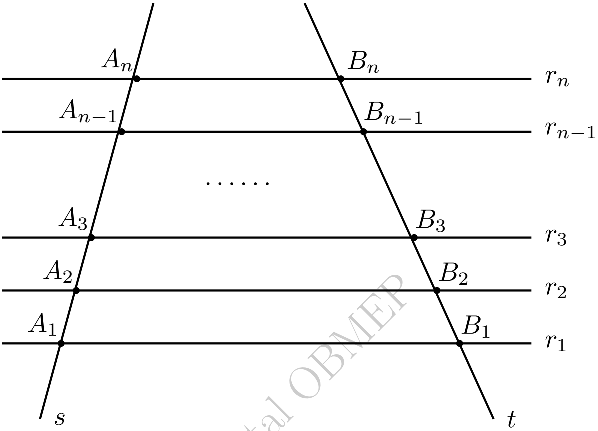
Conforme prometido na seção anterior, nesta seção apresentaremos a demonstração de um caso particular relevante do teorema de Tales. Esse é o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema 10 (caso particular de Tales). *Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Se $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$, com m e n naturais, então $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$. Em particular,*

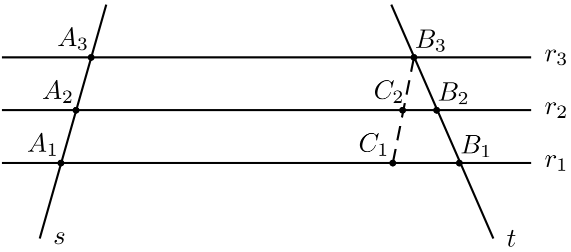
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Para a demonstração desse caso particular do teorema de Tales, precisamos considerar, inicialmente, o seguinte resultado auxiliar.

Lema 11. *Sejam n um número natural, r_1, r_2, ..., r_n retas paralelas e s e t retas transversais a r_1, r_2, ..., r_n, as quais intersectam essas n retas nos pontos A_1, A_2, ..., A_n e B_1, B_2, ..., B_n, conforme mostrado na figura a seguir. Se $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_{n-1}A_n}$, então $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \ldots = \overline{B_{n-1}B_n}$.*



Prova. É suficiente provar que $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} \Rightarrow \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3}$, uma vez que as demais igualdades podem ser obtidas de forma análoga. Para tanto (veja a figura abaixo), trace por B_3 uma paralela s' à reta s, e sejam C_1 e C_2 seus pontos de interseção com as retas r_1 e r_2, respectivamente.



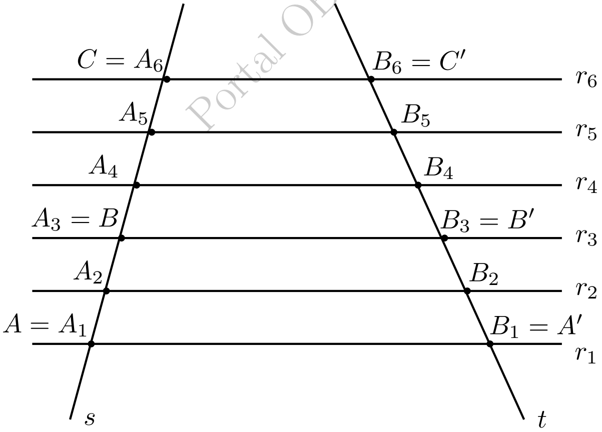
Como $\overleftrightarrow{A_3B_3} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2} \parallel \overleftrightarrow{A_1C_1}$ e $\overleftrightarrow{A_1A_3} \parallel \overleftrightarrow{C_1B_3}$, temos que $A_1C_1C_2A_2$ e $A_2C_2B_3A_3$ são paralelogramos. Logo, $\overline{C_1C_2} = \overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_2A_3} = \overline{C_2B_3}$, e segue de $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ que $\overline{C_1C_2} = \overline{C_2B_3}$.

Agora, no triângulo $C_1B_1B_3$, o ponto C_2 é médio do lado C_1B_3 e $\overleftrightarrow{C_2B_2} \parallel \overleftrightarrow{C_1B_1}$. Portanto, pelo teorema da base média, B_2 é ponto médio do lado B_1B_3, ou, o que é o mesmo, $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3}$. □

Podemos, finalmente, demonstrar o caso particular do teorema de Tales enunciado no teorema anterior.

Prova do teorema 10. Por simplicidade, façamos a prova no caso em que $m = 2$ e $n = 3$; a demonstração no caso geral é completamente análoga.

Nesse caso, supomos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3}$ e queremos mostrar que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}$. Para tanto (acompanhe na próxima figura),



divida o segmento AC em $2 + 3 = 5$ partes iguais, obtendo pontos $A_1 = A$, A_2, $A_3 = B$, A_4, A_5, $A_6 = C$ sobre s e $B_1 = A'$, B_2, $B_3 = B'$, B_4, B_5, $B_6 = C'$ sobre t. Como

$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_5A_6}$, segue do lema anterior que $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \ldots = \overline{B_5B_6} = \ell$. Logo,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2\ell}{3\ell} = \frac{2}{3}.$$

$\square$

Observação 12. O caso particular do teorema de Tales demonstrado acima não engloba as situações em que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ é igual a um número irracional ($\sqrt{2}$, por exemplo). Em uma tal situação, assumiremos a validade do teorema sem demonstração, remetendo o leitor à referência [1] para os detalhes.

Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em dois encontros de 50 minutos cada. É muito importante apresentar a demonstração do caso particular do teorema de Tales aqui discutida, pois o aluno deve perceber que ele não é um resultado auto-evidente e que a validade de novos fatos geométricos se apóia na validade de outros resultados mais simples, já estudados.

A referência [2] contém vários exemplos simples envolvendo o teorema de Tales. Para o leitor interessado em aplicações mais elaboradas, sugerimos a referência [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2024.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.