Material Teórico - Módulo Trigonometria III

Exercícios de funções trigonométricas II

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de janeiro de 2022

1 Exercícios

Neste material, trabalharemos mais alguns exercícios sobre o tema deste módulo, funções trigonométricas.

Exemplo 1 (AFA). *Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo*

$$f(x) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

em que $f(x)$ é a altura, em metros, e x o tempo, em minutos. Dentre as alternativas, marque a única que não condiz com o modelo proposto:

(a) *A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.*

(b) *Entre o momento de detecção de uma crista e da seguinte, passam-se 2 minutos.*

(c) *De 0 a 4 minutos, observam-se mais de duas cristas.*

(d) *As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são iguais.*

Solução. Vamos começar tentando simplificar a expressão para $f(x)$. Primeiramente, lembre-se de que

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right),$$

pois, em geral, $\mathrm{sen}(\pi/2 + \theta) = \cos(\theta)$ para todo θ, o que já provamos em aulas anteriores. (Isso pode ser verificado observando os gráficos de seno e cosseno ou usando a fórmula para o seno de uma soma de arcos.) Logo,

$$f(x) = 3\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Agora, lembre-se de que, para todo A real, vale a fórmula para o seno do arco duplo,

$$\mathrm{sen}(2A) = 2\,\mathrm{sen}(A)\cos(A).$$

Fazendo uso da fórmula acima com $A = \frac{\pi x}{4}$ temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2} \cdot 2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Isso pode ser melhorado ainda mais, usando, dessa vez, uma das fórmulas para o cosseno do arco duplo,

$$\cos(2B) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(B) \implies \operatorname{sen}^2(B) = \frac{1 - \cos(2B)}{2};$$

realmente, fazendo $B = \pi x/2$, obtemos

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\pi x)}{2},$$

ou seja,

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos(\pi x).$$

Como $-1 \le \cos(\pi x) \le 1$, temos que

$$-\frac{3}{4} \le -\frac{3}{4}\cos(\pi x) \le \frac{3}{4};$$

somando $\frac{3}{4}$ a todos os termos das desigualdades acima, ficamos com

$$0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \le \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos(\pi x)}_{f(x)} \le \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

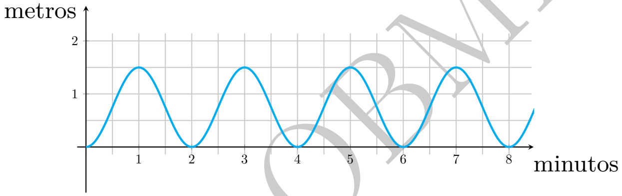
A partir daí, vê-se imediatamente que o item (a) é verdadeiro, pois a altura máxima das ondas é $\frac{3}{2} = 1{,}5$m.

Por outro lado, a *crista* de uma onda é seu ponto mais alto, e a distância entre duas cristas é, precisamente, o período da onda. Para calculá-lo no presente caso, temos de fazer πx variar de 0 a 2π, ou seja, x deve variar de 0 a 2. Então,

f tem período 2 minutos, o que já garante que o item (b) é verdadeiro e o item (c) é falso.

Por fim, para observar que a alternativa (d) é verdadeira, note primeiramente que os instantes listados, em minutos, são $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$; em geral, para $x = \frac{2k-1}{2}$, com k natural, temos $\cos(\pi x) = \cos\left(\frac{2k-1)\pi}{2}\right) = 0$, logo, $f(x) = \frac{3}{4}$ para todos esses valores de x.

Explorando um pouco mais o exemplo, veja que, como $\cos(0) = 1$, temos $f(0) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$; então, reunindo as informações acima e recordando as estratégias que desenvolvemos para esboçar gráficos de funções trigonométricas simples, chegamos sem dificuldade ao esboço a seguir, para o gráfico de f:



$\square$

Observação 2. *Ainda em relação ao exemplo anterior, note que o esboço do gráfico de f dá uma forma mais* geométrica *de entender porque o item (d) é verdadeiro. Realmente, os instantes de crista da onda são, em segundos* $60, 180, 300, \ldots$. *Assim, os instantes listados em (d) diferem, dos instantes de crista, de* 30 *segundos cada; logo, as alturas da onda nesses instantes são todas iguais.*

Exemplo 3 (AFA - adaptada). *Sendo x um número pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$, calcule o conjunto-solução da inequação*

$$-8\operatorname{sen}^4(x) + 10\operatorname{sen}^2(x) - 3 < 0.$$

Solução. A inequação do enunciado pode ser transformada numa inequação de segundo grau fazendo a substituição de variável:

$$y = \operatorname{sen}^2(x).$$

Com isso, queremos resolver, primeiramente, a inequação

$$-8y^2 + 10y - 3 < 0.$$

Para analisar o sinal da função quadrática

$$f(y) = -8y^2 + 10y - 3,$$

comecemos calculando os pontos em que $f(y) = 0$. Temos o discriminante

$$\Delta = 10^2 - 4(-8)(-3) = 100 - 96 = 4,$$

logo,

$$y = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-8)} = \frac{-10 \pm 2}{-16} = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8},$$

ou seja,

$$y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Uma vez que o gráfico de f é uma parábola com concavidade voltada para baixo, para que $f(y) < 0$ é necessário que $y < 1/2$ ou $y > 3/4$.

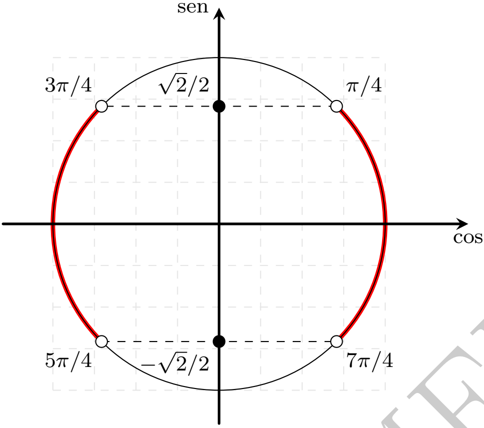
Voltando para a variável x, precisamos calcular os possíveis valores de x que satisfazem:

$$\operatorname{sen}^2(x) < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}^2(x) > \frac{3}{4}.$$

A inequação $\operatorname{sen}^2(x) < \frac{1}{2}$ equivale a $|\operatorname{sen}(x)| < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, a

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{sen}(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Desenhamos abaixo (em vermelho/negrito) os trechos do círculo trigonométrico correspondentes a tais valores de x.

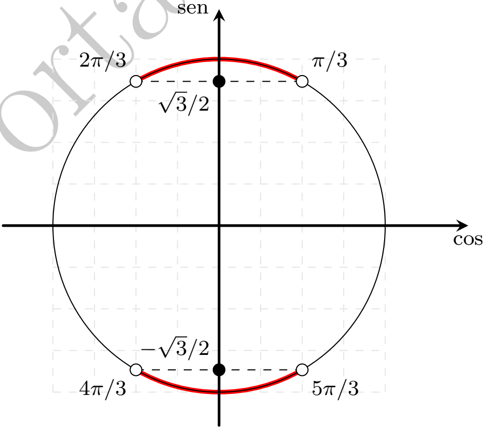


Todos esses valores de x são soluções.

Além deles, temos que incluir também os valores de x que satisfazem a inequação $\operatorname{sen}^2(x) > \frac{3}{4}$, a qual equivale a $|\operatorname{sen}(x)| > \sqrt{3}/2$, ou seja,

$$\operatorname{sen}(x) < -\sqrt{3}/2 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}(x) > \sqrt{3}/2.$$

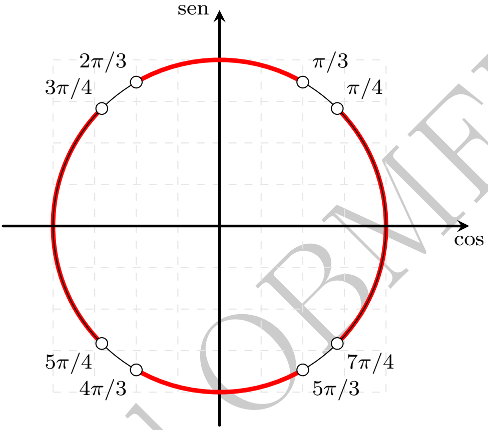
Os trechos correspondentes no círculo trigonométrico encontram-se marcados em vermelho no desenho a seguir:



Por fim, como $x \in [0,2\pi]$, o conjunto-solução do problema original é a união dos intervalos dos dois casos acima:

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right].$$

(Veja, também, a próxima figura, a qual reúne os arcos marcados em vermelho das duas figuras anteriores.)



□

Exemplo 4 (AFA). *Sejam f e g funções reais dadas por*

$$f(x) = \left|\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x}\right| \quad e \quad g(x) = 2,$$

cada uma definida no domínio mais amplo possível. Analise as informações abaixo:

(I) *O conjunto-solução da equação $f(x) = g(x)$ possui infinitos elementos;*

(II) *No intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, a função f é crescente;*

(III) *O período da função f é igual a π.*

Qual ou quais delas são verdadeiras?

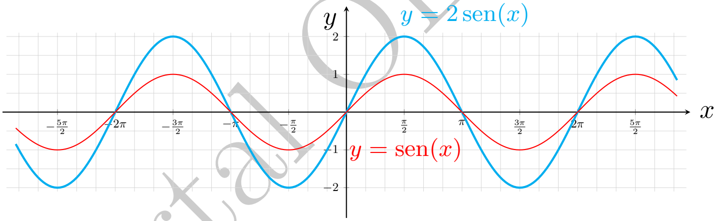
Solução. Vamos começar calculando o domínio da função f. Ele é formado por todos os números reais tais que $\cos(x) \neq 0$. Ou seja,

$$\mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

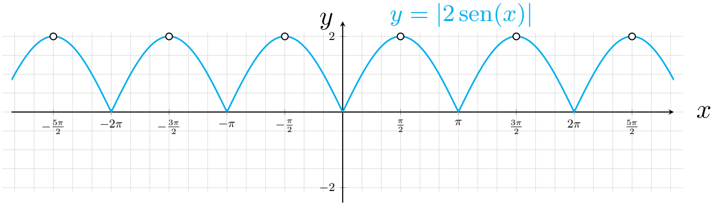
Agora, graças à fórmula para o seno do arco duplo, $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, para todo x *pertencente ao domínio de* f, temos que:

$$f(x) = \left| \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x} \right| = \left| \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos x} \right| = |2\operatorname{sen} x|$$

Nesse ponto, percebemos que uma maneira simples de analisar os itens (I), (II) e (III) passa por esboçar o gráfico de f. Para tanto, começamos desenhando o gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ e multiplicamos sua amplitude por 2, para obter $2\operatorname{sen}(x)$:



Agora, para obter $|2\operatorname{sen}(x)|$, devemos *espelhar* os valores negativos de $2\operatorname{sen}(x)$ ao longo do eixo-x (isto é, utilizando esse eixo como espelho). Contudo, ao fazê-lo, é crucial lembrar que a função f não contém, em seu domínio, nenhum número real da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com k variando em $\mathbb{Z}$; assim, precisamos remover tais pontos do gráfico, o que dá a curva azul do seguinte esboço (com os pontos de altura 2 removidos):



Agora, vamos analisar quais alternativas do enunciado são corretas.

A alternativa (I) é falsa. Acontece que, como $g(x) = 2$ para todo x real, o gráfico de g é uma reta horizontal que toca o gráfico de $y = |2\,\text{sen}(x)|$ infinitas vezes. Porém, as abcissas dos pontos de intersecção não estão no domínio de $f(x)$, de forma que a reta $y = 2$ (que é o gráfico de g) nunca intersecta o gráfico de f.

A alternativa (II) também é falsa, uma vez que o gráfico decresce de $3\pi/4$ até π mas cresce de π até $5\pi/4$. Logo, não é verdade que a função f seja crescente em todo o intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Por fim, a alternativa (III) é claramente verdadeira, como se verifica prontamente, examinando o esboço do gráfico de f.

$\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo deste material seja abordado em um encontro de 50 minutos. Sugerimos também que o professor considere realizar outro encontro, com os exercícios que constam na seção de exercícios deste módulo, dando oportunidade para que os alunos tentem resolver os problemas em casa, entre um encontro e o outro.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [3] traz um curso completo de Trigonometria, no âmbito do Ensino Médio. Por fim, a referência [2] traz várias aplicações da Trigonometria em nível de Ensino Superior.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, segunda edição. SBM, Rio de Janeiro, 2022.

3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.